Об инвариантных и совместимых классах предпочтений без условия транзитивности

Н. Л. Поляков

Аннотация

Доклад посвящен новым исследованиям в рамках *клонового подхода* в Вычислительной Теории Коллективного Выбора (Computational Social Choice), который впервые был предложен в 2005 г. С. Шелахом в [1] и получил дальнейшее развитие в последующее десятилетие, см., напр., [2].

В работе рассматривается стандартная модель коллективного выбора. Даны конечные множества $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ (участников) и A (альтернатив). *Предпочтения* участников представляют собой, вообще говоря, произвольные рефлексивные бинарные отношения на множестве A. Множество всех возможных предпочтений обозначено символом $\mathcal{P}(A)$. Наиболее важные множества всех антисимметричных отношений $P \in \mathcal{P}(A)$ и всех транзитивных антисимметричных отношений $P \in \mathcal{P}(A)$ обозначены, соответственно, $\mathcal{C}(A)$ и $\mathcal{L}(A)$. *Правилом агрегирования* называется любая функция $f : (\mathcal{P}(A))^n \to \mathcal{P}(A)$. Правило агрегирования удовлетворяет условию

- *независимости от посторонних альтернатив* (**IIA**), если для всех $\pi = (P_1, \ldots, P_n)$, $\pi' = (P'_1, \ldots, P'_n) \in (\mathcal{P}(A))^n$ и $x, y \in A$

$$(((x,y) \in P_1 \leftrightarrow (x,y) \in P'_1) \,\&\, \ldots \,\&\, ((x,y) \in P_n \leftrightarrow (x,y) \in P'_n) \to ((x,y) \in f(\pi) \leftrightarrow (x,y) \in f(\pi')).$$

- *единогласия* (**U**), если для всех $\pi = (P_1, \ldots, P_n) \in (\mathcal{P}(A))^n$ и $x, y \in A$

$$(x,y) \in P_1 \cap \ldots \cap P_n \to (x,y) \in f(\pi).$$

Хорошо известно, что каждое правило агрегирования, удовлетворяющее **IIA**, может быть определено с помощью *локальных решающих коалиций*. А именно, правило агрегирования $f : (\mathcal{P}(A))^n \to \mathcal{P}(A)$ удовлетворяет **IIA** тогда и только тогда, когда для каждой пары $(x,y) \in A \times A$, $x \neq y$, существует такое множество $\mathfrak{C}^f_{x,y} \subseteq 2^N$, что

$$(x,y) \in f(\pi) \Leftrightarrow \{i \in N : (x,y) \in P_i\} \in \mathfrak{C}^f_{x,y}$$

для всех $\pi = (P_1, \ldots, P_n) \in (\mathcal{P}(A))^n$.

При рассмотрении некоторого правила агрегирования (или некоторого класса таких правил) хочется надеяться, что его применение не выводит за рамки того или иного «естественного» множества множества предпочтений. Последнее свойство имеет по меньшей мере две различных уточняющих формулировки.

Определение 1. Правило агрегирования $f : (\mathcal{P}(A))^n \to \mathcal{P}(A)$ *сохраняет* множество $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(A)$ (а $\mathcal{D}$ есть *инвариантное множество* правила f), если

$$\pi \in \mathcal{D}^n \to f(\pi) \in \mathcal{D}$$

для всех $\pi \in (\mathcal{P}(A))^n$. Класс всех инвариантных множеств правила f обозначается символом $\mathrm{Inv}\,(f)$.

Определение 2. Пусть f есть n-арное правило агрегирования и $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$. Множество $\mathcal{D}$ называется *совместимым с парой* $(f, \mathcal{C})$, если

$$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C} \text{ и } \pi \in \mathcal{D}^n \to f(\pi) \in \mathcal{C}$$

для всех $\pi \in (\mathcal{P}(A))^n$. Класс всех множеств, совместимых с парой $(f, \mathcal{C})$ обозначается символом $\mathrm{Cons}\,(f, \mathcal{C})$.

Очевидно, для любых множеств $\mathcal{D}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$, если $\mathcal{D}$ есть подмножество некоторого инвариантного множества $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{C}$ правила f, то $\mathcal{D}$ совместимо с парой $(f, \mathcal{C})$. Назовем все такие множества $\mathcal{D} \in \mathrm{Cons}\,(f, \mathcal{C})$ нормальными. Легко убедиться, что не все множества $\mathcal{D} \in \mathrm{Cons}\,(f, \mathcal{C})$ нормальны даже в том случае, когда $\mathcal{C}$ есть множество всех рефлексивных, антисимметричных и транзитивных предпочтений. Оказывается, в достаточно общем случае можно сформулировать условие, которому должно удовлетворять правило агрегирования f для того, чтобы любое совместимое с парой $(f, \mathcal{L}(A))$ множество было нормальным.

Будем говорить, что правило агрегирования

- сохраняет бинарный выбор (или удовлетворяет **BCP**), если $\mathcal{C}(A) \in \mathrm{Inv}\,(f)$;
- удовлетворяет условию чувствительности к обращению бинарных предпочтений (**S**), если для всех $a, b \in A$ и $\pi = (P_1, P_2, \ldots, P_n) \in \mathcal{P}(A)$ выполнено $f(\pi^{a,b}) = f(\pi)^{a,b}$, где для любого бинарного отношения P отношение $P^{a,b}$ обозначает бинарное отношение, полученное заменой пары (a, b) (если оно принадлежит P) парой (b, a), а пары (b, a) (если оно принадлежит P) парой (a, b).

Теорема 1. *Пусть $f : (\mathcal{P}(A))^n \to \mathcal{P}(A)$ есть правило агрегирования, удовлетворяющее условиям* **IIA**, **U**, **TP** *и* **S**. *Тогда следующие условия равносильны*

1. *каждое множество $\mathcal{D}$, совместимое с парой $(f, \mathcal{L}(A))$, нормально;*

2. *для каждого трехэлементного множества $B \subseteq A$ и бинарного отношения $\succeq \in \mathcal{L}(B)$, если множество $\{\succ, \succ^{-1}\}$ совместимо с парой $(f|_B, \mathcal{L}(B))$, то оно нормально (здесь символ $f|_B$ означает правило агрегирования на множестве $\mathcal{P}(B)$, заданное тем же классом локальных выигрывающих коалиций, что и правило f).*

3. *для любых различных $a, b, c \in A$,*

$$\mathfrak{C}^f_{a,b} \cap \mathfrak{C}^f_{b,c} \subseteq \mathfrak{C}^f_{a,b} \Rightarrow (\mathfrak{C}^f_{a,b} = \mathfrak{C}^f_{a,c} \vee \mathfrak{C}^f_{b,c} = \mathfrak{C}^f_{a,c}).$$

Возможность сведения совместимых множеств к инвариантным открывает широкие возможности для описания совместимых множеств в тех случаях, когда правило агрегирования обладает нетривиальным симметричным классом инвариантных множеств. Здесь класс $\mathfrak{D}$ множеств предпочтений назван *симметричным*, если вместе с каждым множеством $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(A)$ и перестановкой σ множества A он содержит множество $\sigma\mathcal{D} = \{\sigma P : P \in \mathcal{D}\}$, где $\sigma P = \{(\sigma(a), \sigma(b)) : (a, b) \in P\}$. Заметим, что если правило f имеет инвариантное множество $\mathcal{D}$, которое может быть определено теоретико-множественной формулой, не содержащей констант из A, то правило f имеет и симметричный класс инвариантных множеств.

Мы предлагаем несложную классификацию всех нетривиальных симметричных классов инвариантных множеств правил агрегирования, удовлетворяющих **IIA**, **U** и **BCP**. Принципиальная возможность такой классификации обязана следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть $|A| \geq 5$. Тогда каждое правило, удовлетворяющее* ***IIA***, ***U*** *и* ***BCP*** *и обладающее нетривиальным симметричным классом инвариантных множеств, удовлетворяет и условию нейтральности (**N**):*

$$\{i : (x, y) \in P_i\} = \{i : (u, v) \in P_i\} \to ((x, y) \in f(\pi) \leftrightarrow (u, v) \in f(\pi))$$

для всех $\pi = (P_1, \ldots, P_n) \in (\mathcal{P}(A))^n$ и $x, y, u, v \in A$.

Список литературы

[1] Shelah S., On the Arrow property. Adv. in Ap. Mat., vol. 34 (2005), pp. 217–251

[2] Polyakov N., Shamolin M. On a generalization of Arrow's impossibility theorem. Doklady Mathematics, 89(3) (2014), pp. 290-292