О некотором классе динамических и нелокальных процедур агрегирования

Н. Л. Поляков[1]

[1] Департамент математики Факультета экономических наук НИУ ВШЭ

Классической задачей математической теории коллективного выбора (Computational Social Choice) является задача агрегирования индивидуальных предпочтений на множестве альтернатив A. Хорошо известная теорема Эрроу о невозможности [1] утверждает, что в общем случае (при $|A| \geq 3$) эта задача неразрешима для линейных (рациональных) предпочтений, т.е. при отсутствии ограничений на область предпочтений не существует процедуры агрегирования, которая удовлетворяет некоторым естественным (локальным) условиям (см. [2]) и обеспечивает рациональность коллективных предпочтений, если все индивидуальные предпочтения рациональны. Теорема Эрроу о невозможности была распространена Шелахом [3] на случай произвольного симметричного множества предпочтений из класса $\mathfrak{C}_r(A)$ функций выбора, определенных на множестве $[A]^r$ r-элементных подмножеств множества A, при некоторых дополнительных ограничениях. Эти ограничения были сняты в работах [4, 5]. В этих работах был применен и развит предложенный Шелахом *метод клонов* (см. [6]), который позволяет сводить некоторые проблемы математической теории коллективного выбора к задачам теории дискретных функций.

Результаты работ [3, 4, 5] показывают, что принцип невозможности Эрроу распространяется далеко за пределы класса рациональных предпочтений. Тем не менее, если от классических процедур агрегирования перейти к более широкому классу динамических процедур, теорема невозможности перестает быть справедливой (см. [7]). При этом логические ограничения, накладываемые на процедуры агрегирования требованием сохранения множества рациональных предпочтений, приводят не к пустому множеству (как в классическом случае), а к весьма естественному классу процедур, допускающему несложное явное описание.

Более детально, мы рассматриваем динамические процедуры агрегирования индивидуальных предпочтений $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_r(A)$ на множестве альтернатив A, $|A| \geq 3$, в которых на каждом шаге участники подчиняются промежуточным коллективным решениям на некоторых подмножествах B множества A и перестраивают свои априорные предпочтения в соответствии с функцией адаптации $\mathcal{A}$. Последовательность промежуточных решений определяется жребием J, т.е. возрастающей по включению последовательностью подмножеств B множества альтернатив.

Мы даем явную классификацию клонов локальных функций агрегирования, каждый из которых состоит из всех функций агрегирования, которые динамически сохраняют симметричное множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_2(A)$ относительно симметричного множества жребиев $\mathcal{J}$. С использованием этой классификации показано, что клон $\mathcal{F}$ локальных функций агрегирования, сохраняющих множество $\mathfrak{R}_2(A)$ рациональных предпочтений относительно симметричного множества $\mathcal{J}$ содержит не-диктаторские функции агрегирования тогда и только тогда, когда $\mathcal{J}$ есть множество максимальных жребиев; при этом клон $\mathcal{F}$ порождается функцией большинства.

Основным методом исследований остается метод клонов, в частности, теорема о дихотомии (см. [8]).

Дальнейшим развитием этих идей является описание класса нелокальных процедур агрегирования $f_{J,\mathcal{A}}$, зависящих от жребия J и «имитирующих» динамическое агрегирование при фиксированной функции адаптации $\mathcal{A}$. Если f динамически сохраняет некоторое множество $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_r(A)$ относительно множества жребиев $\mathcal{J}$, то функция агрегирования $f_{J,\mathcal{A}}$ сохраняет множество $\mathfrak{D}$ для каждого жребия $J \in \mathcal{J}$. Для случая $\mathfrak{D} = \mathfrak{R}_2(A)$ функцию адаптации можно выбрать так, чтобы в любом профиле $\mathbf{c} \in (\mathfrak{R}_2(A))^n$ победитель по Кондорсе (если он есть) совпадал с максимальным элементом относительно предпочтений $f_{J,\mathcal{A}}(\mathbf{c})$ для каждого максимального жребия J и функции f, которая динамически сохраняет множество рациональных предпочтений относительно множества максимальных жребиев.

Список литературы

[1] Arrow K. Social Choice and Individual Values. 2 edition. Yale University Press (1963).

[2] Aleskerov F. T. Arrovian Aggregation Models. Springer US (1999).

[3] Shelah S. On the Arrow property. Adv. in Ap. Mat., vol. 34 (2005), pp. 217–251.

[4] Polyakov N. Shamolin M. On a generalization of Arrow's impossibility theorem. Doklady Mathematics, vol. 89, no. 3 (2014), pp. 290-292.

[5] Polyakov, N. Galois connections for classes of discrete functions and their application to mathematical problems of social choice theory. PhD thesis. Moscow University (2016).

[6] Поляков Н. Л. Functional Galois connections and a classification of symmetric conservative clones with a finite carrier // Working papers by Cornell University. Series math "arxiv.org"(2018), pp. 1–22.

[7] Поляков Н. Л., Шамолин М. В. О динамических системах агрегирования. // Труды семинара им. И.Г. Петровского (2019), Т. 32, стр. 257-282.

[8] Polyakov N. Dichotomy theorem in computational social choice theory. // Proceedings of Russian Workshop on Complexity and Model Theory, June 9 – 11, Moscow, 2019.