Характеристическим свойством медианы одномерной выборки является тот факт, что медиана минимизирует суммарное расстояние до всех элементов выборки. Именно это минимизирующее свойство и положено в основу определения геометрической медианы m для конечного набора точек $P_1, \dots P_n$ на плоскости

$$m = \operatorname*{arg\,min}_{X \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{n} |P_i - X|. \tag{1}$$

На протяжении прошлого века, начиная с Альфреда Вебера [1], дискретная геометрическая медиана, а также некоторые ее обобщения, используется в качестве эффективного рабочего инструмента в экономической науке. Параллельно продолжают исследоваться математические свойства дискретной медианы и разрабатываются эффективные численные методы для ее нахождения [2]. А ближе к концу века интерес смещается в сторону непрерывного случая к геометрическим медианами кривых и областей [3, 4].

Здесь мы как раз и сосредоточимся на непрерывном случае. Мы начнем с записи градиентной системы для нахождения геометрической медианы треугольной области (Теорема 1). Это позволит нам сформулировать простое и компактное характеристическое свойство геометрической медианы треугольной области (Предложение 1). Дальше эти результаты обобщаются на другие виды областей, а также на другие медианоподобные точки.

Напомним, что по аналогии с дискретным случаем (1) геометрическая медиана m области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ определяется как

$$m = \operatorname*{arg\,min}_{X \in \mathbb{R}^2} \int_{P \in \Omega} |P - X| \, dP,$$

где $|P - X|$ — обычное евклидово расстояние между точками P и X. После введения обозначения

$$\Sigma_\Omega(X) = \int_{P \in \Omega} |P - X| \, dP, \tag{2}$$

то же самое определение можно записать короче

$$m = \operatorname*{arg\,min}_{X \in \mathbb{R}^2} \Sigma_\Omega(X).$$

Нам понадобится еще одно обозначение, пусть P_1 и P_2 — некоторые точки на плоскости, тогда

$$\Sigma_{P_1 P_2}(X) = \int_{P \in P_1 P_2} |P - X| \, dP,$$

где интегрирование ведется по отрезку P_1P_2. Заметим, что величина $\Sigma_{P_1P_2}(X)/|P_2 - P_1|$ — это среднее расстояние от точки X до точек отрезка P_1P_2.

Вот формулировка нашего первого результата.

Теорема 1. *Пусть задана треугольная область Δ с вершинами P_1, P_2, P_3. Точка m тогда и только будет ее геометрической медианой, когда выполняется равенство*

$$\frac{\Sigma_{P_1P_2}(m)}{|P_2 - P_1|}\,\overrightarrow{P_1P_2} + \frac{\Sigma_{P_2P_3}(m)}{|P_3 - P_2|}\,\overrightarrow{P_2P_3} + \frac{\Sigma_{P_3P_1}(m)}{|P_1 - P_3|}\,\overrightarrow{P_3P_1} = 0. \tag{3}$$

А вот непосредственное следствие из этой теоремы.

Предложение 1 (Характеристическое свойство геометрической медианы треугольной области)**.** *Пусть задана треугольная область Δ с вершинами $P_1P_2P_3$. Точка m тогда и только тогда будет его геометрической медианой, когда*

$$\frac{\Sigma_{P_1P_2}(m)}{|P_2 - P_1|} = \frac{\Sigma_{P_2P_3}(m)}{|P_3 - P_2|} = \frac{\Sigma_{P_3P_1}(m)}{|P_1 - P_3|}. \tag{4}$$

Таким образом геометрическая медиана треугольной области — это точка, для которой три средних расстояния до трех сторон граничного треугольника равны между собой.

Предыдущая Теорема 1 может быть обобщена до следующего результата.

Теорема 2. *Пусть задана плоская область Ω с кусочногладкой границей. Точка m тогда и только будет ее геометрической медианой, когда выполняется равенство*

$$\int_{P\in\partial\Omega} f(P - m)\,\overrightarrow{dP} = 0.$$

Теперь снимем ограничение $n = 2$ на размерность и вместо функции Σ_Ω, определенной равенством (2), будем рассматривать функции более общего вида, определенные равенством

$$\Sigma^f_\Omega(X) = \int_{P\in\Omega} f(P - X)\,dP,$$

где f — это некоторая функция аргумента $P \in \mathbb{R}^n$. Здесь имеет место следующий общий результат.

Теорема 3. *Пусть функция f непрерывна и Ω — это ограниченная область с кусочно гладкой границей, расположенная в пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда для функции Σ_Ω^f условие критичности точки m равносильно выполнению следующего равенства*

$$\int_{P\in\partial\Omega} f(P-m)\,\overrightarrow{n(P)}\,dP = 0, \tag{5}$$

где $\overrightarrow{n(P)}$ — это единичный вектор внешней нормали к границе области Ω в точке P.

Вернемся к тому, с чего мы начали, а именно, к геометрической медиане треугольной области. В общем случае не удается найти точное решение градиентной системы (3) или системы (4). Мы смогли это сделать только в одном, весьма вырожденном случае, речь о “сплюснутом” треугольнике со сторонами α, β, γ, в котором $\gamma = |\alpha - \beta|$. Имеется ввиду следующее утверждение.

Следствие 1. *Рассмотрим треугольники со сторонами α, β, γ, где две большие стороны α и β фиксированы, а меньшая γ является параметром. Обозначим геометрическую медиану такого треугольника $m(\gamma)$. Пусть теперь γ стремится к $|\alpha - \beta|$, тогда $m(\gamma)$ стремится к точке m, которая отстоит от общей вершины сторон α и β на расстояние $\sqrt{\alpha\beta/2}$.*

Это утверждение является простым следствием равенства (4), примененного непосредственно к сплюснутому треугольнику со сторонами α, β и $|\alpha - \beta|$, для которого оно имеет смысл и для которого в то же самое время само понятие геометрической медианы не вполне определено.

Добавим, что среди сплюснутых треугольников имеются два типа равнобедренных — это треугольники со сторонами $\alpha, \alpha/2, \alpha/2$ и $\alpha, \alpha, 0$. В работе [5] содержится более точная асимптотическая информация о расположении их геометрических медиан.

Список литературы

[1] Alfred Weber , Über den Standort der Industrien. 1.Teil: Reine Theorie des Standorts. 2. Auflage. Tübingen 1909

[2] G. O. Wesolowsky, *The Weber Problem: History and Perspectives*, Location Sciense, 1993, 1, pp 5-23

[3] Sandor P. Fekete, Joseph S. B. Mitchell, and Karin Beurer, *On the Continuous Fermat–Weber Problem*, Operations Research, 2005, V. 53, no 1, pp 61–76

[4] Thomas T. C .K. Zhang, John G. Carlsson *Continuous Fermat–Weber Problem for a Convex Polygon Using Euclidean Distance*, 2014 https://arxiv.org/abs/1403.3715

[5] П. А. Панов, *О геометрической медиане выпуклых, а также треугольных и других многоугольных областей*, Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика, в печати