

## **Меры устойчивости в сетевых структурах с учетом их топологии**

На данный момент существует огромное число сетевых структур, изменяющихся со временем. Так как основные изменения связаны с появлением новых вершин, а также возникновением/исчезновением связей между ними, возникает потребность оценки того, как насколько сильно изменилась сама сетевая структура.

Существует несколько способов, которые позволяют оценить степень изменения двух сетевых структур. Наиболее простым способом является вычисление различных коэффициентов корреляции на основе матриц связности сети. Тем не менее, данный способ совершенно не учитывает то, как узлы сети связаны друг с другом через какие-то промежуточные узлы, а также то, какие элементы сети являются наиболее важными. Более того, каждое ребро считается одинаковым по важности без учета того, соединяет ли оно две различные компоненты связности или две вершины в сильно связанной сети. Другим способом оценки изменения сети является оценка того, сколько изменений надо сделать в одной сети, чтобы она была похожа на другую сеть [1]. Данный подход также не учитывают то, как изменяется набор ключевых элементов сети, более того, остается неясным адаптация подхода к взвешенным сетевым структурам. Существует также множество подходов, которые оценивают схожесть двух сетей на основе сравнения их основных характеристик [2-3] без учета того, как изменяются связи между вершинами. Наконец, в работе [4] был предложен подход (предложен алгоритм Deltacon), который оценивает то, как любая пара вершин связана между собой как напрямую, так и через посредников, в результате чего данная информация агрегируется в меру схожести двух сетей. Модель позволяет учитывать изменение структуры связей между вершинами, тем не менее, изменение набора наиболее важных элементов сети в данной работе никак не учитывается.

В рамках нашей работы предложена модель, которая позволяет производить оценку того, как изменяется сеть с точки зрения своей структуры, а также набора ключевых элементов. Изменение структуры оценивается с точки зрения попарного взаимоотношения узлов сети, в то время ключевые элементы сравниваются на основе интервальных порядков.

Оценка попарного взаимоотношения узлов сети происходит в несколько этапов. Так как зачастую сетевые структуры являются неоднородными, а вершины имеют индивидуальные характеристики, связи одной и той же интенсивности могут иметь высокую важность для одной вершины и низкую важность для другой вершины. Другими словами, связи в сетевой структуре зачастую не отражают реальную важность, в связи с чем возникает необходимость переоценки исходных связей между элементами сети для определения их важности с учетом индивидуальных особенностей элементов сети. Для осуществления данного этапа мы использовали подход, разработанный в работе [5],

который дополнительно позволяет учитывать то, как некоторые элементы сети влияют на другие элементы как группа, а также то, как они связаны друг с другом не более чем через  $k$  посредников. Таким образом, мы можем преобразовать исходную сеть в момент времени  $t$  (каждую связь между вершинами  $i$  и  $j$  можно обозначить через  $w_{ij}^t$ ) в сеть, отражающую попарное влияние элементов друг на друга (обозначим через  $\tilde{c}_{ij}^t$ ). Тогда меру изменения сетевой структуры в момент времени  $t+1$  можно оценить по формуле

$$\delta(\tilde{C}_t, \tilde{C}_{t+1}) = \frac{\sum_{j,k}^n |\tilde{c}_{ij}^t - \tilde{c}_{ij}^{t+1}|}{n^2 \cdot \max_{j,k}(\tilde{c}_{ij}^t, \tilde{c}_{ij}^{t+1})},$$

где  $\tilde{C}_t, \tilde{C}_{t+1}$  – матрицы связности сети в момент времени  $t$  и  $t+1$ , отражающие попарное влияние элементов сети,  $n$  – число элементов в сети.

Мера схожести сетевых структур  $\delta(\tilde{C}_t, \tilde{C}_{t+1})$  изменяется от 0 до 1. В случае, если сеть никак не изменилась, мера схожести равна 0. Наоборот, если две сети сильно отличаются (например, пустой граф и полный граф, или 2 сети, связи в которой прямо противоположно направлены), мера схожести стремится к 1. Таким образом, можно оценить, как две сети отличаются с точки зрения взаимосвязей между элементами с учетом индивидуальных характеристик ее элементов, возможности их группового взаимодействия и непрямого влияния.

Другим немаловажной особенностью сети является набор ее ключевых элементов. Для ненаправленных взвешенных графов даже маленькие изменения в структуре сети и весах на ребрах могут привести к сильным изменениям набора важных элементов. Для этого мы также рассматриваемый параметр, который показывает схожесть сети с точки зрения набора центральных элементов (обозначаемых через  $R^t, R^{t+1}$ ), вычисляемый по следующей формуле

$$d(R^t, R^{t+1}) = \frac{\sum_{j \neq k}^n |r_{ij}^t - r_{ij}^{t+1}|}{n \cdot (n-1)},$$

где  $r_{ij}^t = 1$ , если  $c_i^t > c_j^t$  и  $r_{ij}^t = 0$  в противном случае,  $c_i^t$  – центральность вершины  $i$  в момент времени  $t$ .

Таким образом, мы считаем, что две сети являются схожими, если они имеют одинаковую структуру взаимосвязей между элементами, а также одинаковый набор ключевых элементов. Данные особенности не учитываются ни одной из существующих мер схожести сетевых структур.

Предложенный подход позволяет оценить основные изменения в сетевых структурах, изменяющихся со временем, и также выявить эффекты в сети, отклоняющиеся от нормы.

Предложенная методология была применена к сети международной миграции, для которых ранее были посчитаны индексы центральности в работах [6-7], и было показано, как меняются миграционные процессы между странами в различные годы (см. Рис. 1).

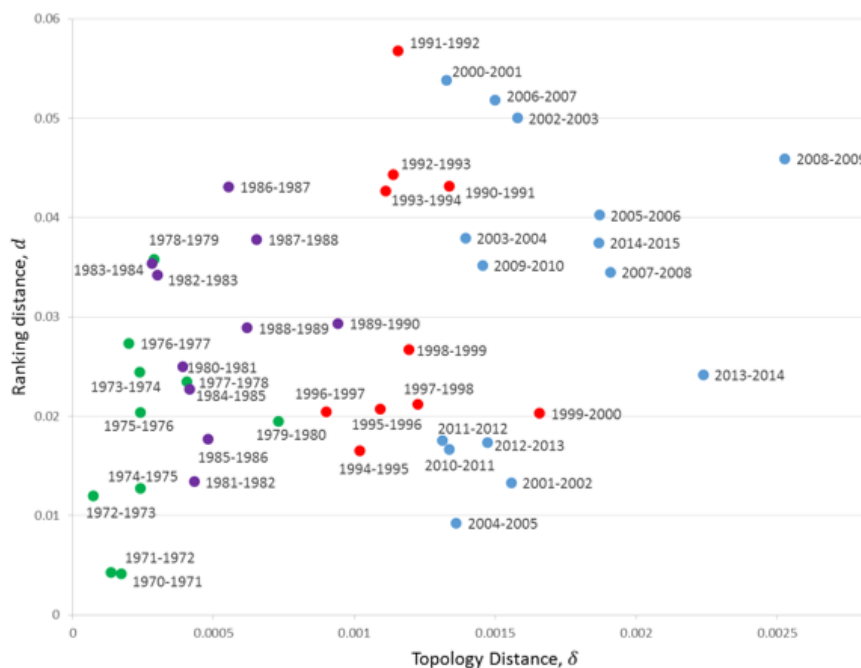


Рис.1 Изменение структуры миграционных процессов.

### Список литературы

1. Bunke H, Dickinson PJ, Kraetzl M, Wallis WD (2007) A graphtheoretic approach to enterprise network dynamics. Birkhäuser, Boston;
2. A. N. Papadopoulos and Y. Manolopoulos, "Structure-based similarity search with graph histograms," Proceedings. Tenth International Workshop on Database and Expert Systems Applications. DEXA 99, Florence, Italy, 1999, pp. 174-178;
3. Papadimitriou, P., Dasdan, A. & Garcia-Molina, H. J Internet Serv Appl (2010) 1: 19;
4. Koutra D, Vogelstein J, Faloutsos C (2013) Deltacon: a principled massive-graph similarity function. In: Proceedings of the 13th SIAM international conference on data mining (SDM), Texas-Austin, TX;
5. Aleskerov F., Meshcheryakova N, Shvydun S., Centrality measures in networks based on nodes attributes, long-range interactions and group influence, arXiv pre-print arXiv:1610.05892;
6. Aleskerov F. T., Meshcheryakova N. G., Rezyapova A., Shvydun S. V. Network Analysis of International Migration, in: Models, Algorithms, and Technologies for Network Analysis. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics / Ed. by V. A. Kalyagin, A. I. Nikolaev, P. M. Pardalos, O. Prokopyev . Vol. 197. Springer, 2017. P. 177-185.
7. Aleskerov F. T., Meshcheryakova N. G., Rezyapova A., Shvydun S. V. Network analysis of international migration, arXiv preprint arXiv:1806.06705.