Модифицированная модель экономического равновесия Касселя-Вальда

В.К. Горбунов

1. Современная неоклассическая теория экономического равновесия (ТЭР), основанная Леоном Вальрасом в 1874 г. в рамках его (и, независимо, У. Джевонсом) программы перестроения экономической теории по образцу науки механики, относится к микроэкономике (Mas-Colell et al., 1995). Здесь исходными агентами экономической системы являются индивидуальные потребители (домохозяйства) и 'фирмы', постулируемые рациональными и независимыми. Вальрас и Джевонс начали с построения математической теории потребительского спроса индивида, считая, что теория рыночного (совокупного) спроса будет подобной. Согласно их эквивалентным теориям индивид покупает набор благ, максимизирующий их 'полезность' среди наборов, доступных при данных ценах. Целью ТЭР является определение цен в экономике, при которых рыночный спрос на различные блага совпадает с их совокупным предложением.

Модель равновесия Вальраса была пересмотрена как система потребителей-индивидов и производителей-фирм в работе К. Эрроу и Ж. Дебре [1], определившей дальнейшее развитие ТЭР до наших дней [2], [3] [1]. Хорошо известны провалы этого *редукционистского* подхода относительно теорий рыночного спроса и цен [2, Ch.4, sect. 17.E], [4, 5, 6, 7]. Эти провалы породили скепсис у многих исследователей относительно ТЭР и появление ряда проектов пересмотра неоклассической экономической теории. При этом проблема цен равновесия не рассматривается.

2. Современник Вальраса Густав Кассель (Gustav Cassel) не принял теорию спроса индивида, неподтверждаемую фактами, и предложил модификацию модели Вальраса, представив рыночный спрос как целостный исходный объект, но без какой-либо теории [8, Ch. 4]. Модель Касселя была усовершенствована в 1930-х годах, и Абрахам Вальд (Abraham Wald) доказал существование и единственность равновесия [9]. При этом он ввёл условие на рыночный спрос, которое позже П. Самуэльсон предложил как принцип рациональности *индивидуального* потребительского выбора, названый ещё позже Слабой Аксиомой 'выявленного предпочтения'. Подход Касселя к экономике как к социальному явлению противоречил методологическому индивидуализму неоклассической теории 20-го века, и установленное противоречие между рациональностью индивидуального и рыночного спросов решено в неоклассике, господствующей до настоящего времени, в пользу индивида. *Холистическая* модель Касселя-Вальда осталась на периферии ТЭР. Она была формально развита относительно производства в рамках линейного программирования [10, Ch. 13], но условие Вальда для рыночного спроса, если привлекалось, то лишь как формальное 'экономически нелегитимное' упражнение для демонстрации возможной единственности равновесия [11, п. 9.4]. Мичио Моришима (Michio Morishima) развил эту модель [12, гл. 2] включением модели производства Леонтьева. До настоящего времени немало математиков продолжают развитие модели Эрроу-Дебре, алгоритмизации и исследованию патологий возможных множеств равновесия в этой модели [3].

В наших книгах [13, 14] предложен и обоснован пересмотр теории спроса на холистической основе. Здесь исходным объектом является *статистический ансамбль потребителей* исследуемого рынка, наблюдаемый через статистику продаж, и *аксио-*

---

[1] См. реферат автора https://zbmath.org/?q=an:06593362 (дата обращения: 29.12.2017).

мы формальной теории индивидуального спроса [2, Ch. 3] становятся *научными гипотезами* коллективной рациональности, *верифицируемыми* по статистике. При этом сохранился модельный аппарат неоклассической теории. Решение проблемы рыночного спроса позволяет пересмотреть ТЭР, взяв за основу модель равновесия Касселя-Вальда-Леонтьева [12].

3. Рассмотрим экономику, производящую *n продуктов* (*и услуг*) и использующую для этого *m факторов производства,* или *ресурсов.* Потребителями являются *население, производство и государство/администрация*. Население потребляет *товары* как *домохозяйства*, и *общественные блага* – совместно. Валовой выпуск продуктов за некоторый период времени обозначим $z=(x,y)\in E_+^n$, где $x\in E_+^{n_1}$ – товары и $y\in E_+^{n_2}$ – прочие продукты. Вектор ресурсов – $r\in E_{++}^m$. Заданы *технологическая* $(n\times n)$ *матрица* $A\geq 0$ и $(m\times n)$ *матрица ресурсных потребностей* $B\geq 0$. Конечный выпуск $c=(x_c,y_c)\in E_+^n$, где $x_c\in E_+^{n_1}$ – количества товаров, и $y_c\in E_+^{n_2}$ – количества прочих продуктов. Эти объекты связаны условиями

$$(I-A)z=c,\quad Bz\leq r,\quad z\geq 0. \tag{1}$$

Введём цены: товаров $p_x\in E_+^{n_1}*$(сопряжённое пространство), прочих продуктов $p_y\in E_+^{n_2}*$, всех продуктов $p=(p_x,p_y)\in E_+^n*$ и ресурсов $v\in E_+^m*$. Рациональность производства заключается в *максимизации стоимости* конечного выпуска $\langle p,c\rangle\equiv\langle p,(I-A)z\rangle$ *при условиях* (1).

Переформулируем поставленную задачу, приняв стандартные предположения [11, 12] о матрицах *A* и *B*:

Предположение 1. Технологическая матрица *A продуктивная и неразложимая.*
Предположение 2. У ресурсной матрицы *B нет нулевых строк и столбцов*.

Продуктивность матрицы *A* означает, что система Леонтьева $(I-A)z=c$ имеет решение $z\geq 0$ при любом векторе $c\geq 0$ конечного выпуска. При этом существует обратная *матрица Леонтьева* $H=(I-A)^{-1}\geq 0$. Неразложимость *A* обеспечивает $H>0$ [11, с. 100]. Элементы этой матрицы $h_{ij}>0$ представляют *полные затраты* продукта *i*, требуемого для производства единицы продукта *j*. Отсутствие у матрицы *B* нулевых столбцов обеспечивает ограниченность множества валовых выпусков $\{z\}$, допустимых по ограничениям $Bz\leq r$.

Выразим валовой выпуск через конечный: $z=Hc$, введём матрицу *D=BH* и запишем ресурсное ограничение из (1) в виде $Dc\leq r$. В силу $H>0$ отсутствие у матрицы $B\geq 0$ нулевых строк обеспечивает $D>0$. Поставленная задача максимизации стоимости конечного выпуска с аргументом минимизации *z* сводится к задаче ЛП относительно переменных *c*:

$$C(p)=Arg\max_c\left\{\langle p,c\rangle:\quad Dc\leq r,\quad c\geq 0\right\}. \tag{2}$$

Модель производства (2) формально совпадает с моделью производства Вальраса-Касселя [10, 11]. Её решение $C(p)=\left(X_c(p),Y_c(p)\right)$ является *производственным предложением* товаров $X_c(p)$ и прочих продуктов $Y_c(p)$.

Связь цен товаров p и цен факторов v, соответствующих гипотезе рациональности, устанавливается двойственной к (2) задачей

$$V(p)=Arg\min_{v}\left\{\langle r,v\rangle:\quad D^T v\ge p,\quad v\ge 0\right\}. \tag{3}$$

Согласно теореме двойственности ЛП решение пары задач (2) и (3) эквивалентно решению системы линейных неравенств

$$Dc\le r,\quad c\ge 0,\quad D^T v\ge p,\quad v\ge 0,\quad \langle p,c\rangle=\langle r,v\rangle. \tag{4}$$

Эта система определяет оптимальные значения (v, c) при данных ценах продуктов p, и стоимость ресурсов $e\triangleq\langle r,v\rangle$ представляет *совокупный доход экономики*. Этот доход затрачивается на оплату конечного выпуска c (*закон Вальраса*).

4. Для определения равновесия в экономике требуется определить *полный спрос* на конечный выпуск $c=\left(x_c,y_c\right)$ со стороны агентов модели в зависимости от цен. Совокупный спрос домохозяйств (статистического ансамбля потребителей) на товары x_c определяется ценами p_x и общими расходами e_x: $x_c=x_c\left(p_x,e_x\right)$. В данном варианте стационарной экономики типа Вальраса считается, что e_x представляет бюджет населения, составляющий долю $\theta\in(0,1)$ совокупного дохода: $e_x=\theta e\equiv\theta\langle r,v\rangle$. Представим спрос $x_c\left(p_x,e_x\right)$ согласно обобщённой теории спроса [15, 6].

Предположение 3. Коллективные предпочтения домохозяйств представляются *монотонно убывающим дифференцируемым векторным полем* $g\colon E_+^{n_1}\to E_+^{n_1}$.

Компоненты поля g_i имеют смысл *относительных ценностей* благ $i=\overline{1,n_1}$, и их отношения $S_{ij}(x_c)=g_i(x_c)/g_j(x_c)$ являются *предельными нормами замещения* блага j благом i в точке x_c. Рациональность потребительского выбора соответствует *обобщённому принципу Госсена*: $S_{ij}(x_c)=p_{xi}/p_{xj}$. Выделяя из этих равенств минимальную полную подсистему с j=1 и добавляя расходное условие, получим обобщённую систему Госсена-Вальраса:

$$p_{x1}g_i(x_c)=p_{xi}g_1(x_c),\quad i=\overline{2,n_1};\quad \langle p_x,x_c\rangle=e_x. \tag{5}$$

Предположение 3 обеспечивает [15, с. 74-76] однозначную разрешимость системы (5), и её решение $x_c\left(p_x,e_x\right)$ является дифференцируемой функцией *коллективного спроса домохозяйств*, однородной нулевой степени и удовлетворяющей Слабой Аксиоме выявленного предпочтения. Последнее означает: *для любых двух ситуаций "цены – расходы"* $\left(p_x,e_x\right)$ *и* $\left(p_x',e_x'\right)$, *если*

$$\left\langle p_x,x_c\left(p_x',e_x'\right)\right\rangle\le e_x \ \text{и}\ x_c\left(p_x',e_x'\right)\ne x_c\left(p_x,e_x\right),\ \text{то}\ \left\langle p_x',x_c\left(p_x,e_x\right)\right\rangle> e_x'. \tag{6}$$

В случае потенциальности поля g его потенциал $u: E_+^{n_1} \to R$ является дифференцируемой возрастающей вогнутой *функцией предпочтения,* и обобщённая теория спроса становится классической теорией.

Определим спрос на прочие продукты y_c (формируемый производством и администрацией) также в зависимости от цен и совокупных расходов $e_y = (1-\theta)e \equiv \left\langle p_y, y_c\left(p_y, e_y\right)\right\rangle$, закрепив его структуру $y_0 \in E_+^{n_2}$:

$$y_c\left(p_y, e_y\right) = \frac{e_y}{\left\langle p_y, y_0\right\rangle} y_0 . \tag{7}$$

Лемма. *Спрос* (7), *и полный спрос* $c(p,e) = \left(x_c\left(p_x, e_x\right), y_c\left(p_y, e_y\right)\right)$ *при выполнении предположения* 3 *являются функциями, однородными нулевой степени, удовлетворяющими закону Вальраса и Слабой Аксиоме ВП.*

Рассмотрим полный спрос как функцию цен $\bar{c}(p,v) \triangleq c\left(p, e(v)\right)$, где бюджет экономики $e(v) = \langle r, v\rangle$. Очевидно, спрос $\bar{c}(p,v)$ является функцией, однородной нулевой степени, удовлетворяющей закону Вальраса и Слабой Аксиоме.

Определение. *Равновесием экономики* (1), (2), (5), (7) *со спросом на конечный выпуск* $\bar{c}(p,v)$ *называется такой набор цен* (p^*, v^*) *и выпуска* $c^* = \bar{c}(p^*, v^*)$, *что тройка* (p^*, v^*, c^*) *удовлетворяет системе* (4). *При этом спрос является также предложением производства:* $c^* \in C(p^*)$.

В силу однородности нулевой степени функций спроса состояние равновесия системы (4) инвариантно относительно масштабирования цен. Для исключения этого произвола наложим дополнительное условие – принадлежность цен стандартному симплексу в пространстве цен $E_+^{(n+m)^*}$:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j + \sum_{i=1}^{m} v_i = 1, \quad p \ge 0, \quad v \ge 0 . \tag{8}$$

Теорема. *Пусть в экономике* (1), (2) *спрос на конечный выпуск* $c(p,e) = \left(x_c\left(p_x, e_x\right), y_c\left(p_y, e_y\right)\right)$ *определяется согласно* (5) *и* (7), $e_x = \theta\langle r, v\rangle$, $e_y = (1-\theta)\langle r, v\rangle$, *для матриц A, B и поля предпочтений* g *выполнены предположения* 1-3, *и цены удовлетворяют* (8). *Тогда существует равновесие* $\left(p^*, v^*, z^*\right)$, *в котором цены продуктов и валовые выпуски* $\left(p^*, z^*\right)$ *определены однозначно. Если при этом ранг B равен числу факторов* $m \le n$, *то их цены* v^* *также определены однозначно.*

5. В отличие от модели Эрроу и Дебре, представляющей частнособственническую децентрализованную экономику совершенной конкуренции, экономика (1), (2), (5), (7), (8) инвариантна к формам собственности и степени централизации. Равновесные цены обеспечивают общественную рациональность производства и потребления. Они определяются как объективными факторами производственных издержек, так и субъективными предпочтениями, усреднёнными по ансамблю потребителей. Все параметры мо-

дели могут быть оценены по стандартной статистике производства и потребления. Соответственно, данная модель и её дальнейшее развитие могут использоваться в проблемах анализа и регулирования национальных и региональных экономик.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arrow K.J., Debreu G.* Existence of an equilibrium for a competitive economy // Econometrica. 1954. V. 22. № 3. P. 265–290.
2. *Mas-Colell A., Whinston M., Green J.* Microeconomic Theory. NY: OUP. 1995. 1018 p.
3. *Balasko Y.* Foundations of the Theory of General Equilibrium. Hackensack, NJ: World Scientific, 2016. 272 p.
4. *Полтерович В.М.* Кризис экономической теории // Экономическая наука современной России. 1998. № 1 (1). С. 46-66.
5. *Kirman A.* The economic crisis is a crisis for economic theory // CESifo Economic Studies. 2010. V. 56(4). P. 498-535.
6. *Горбунов В.К.* К теории рыночного спроса: регулярность и экономическое равновесие // Экономическая наука соврем. России. 2013. № 4 (63). С. 19-36.
7. *Горбунов В.К.* Проблема цен в экономической теории и государственном управлении // Государственное управление. Электронный вестник. Вып. № 62. Июнь 2017 г. С. 186-209.
8. *Cassel G.* The Theory of Social Economy. New York: Augustus M. Kelley, 1967 (нем. ориг. 1918). 708 p.
9. *Wald A.*). On some systems of equations of mathematical economics // Econometrica.1951. V. 19. № 4. P. 368–403. (Нем. ориг. 1936).
10. *Dorfman R., Samuelson P., and Solow R.* Linear Programming and Economic Analysis. N.Y.: McGraw-Hill, 1958. 523 p.
11. *Ланкастер К.* Математическая экономика. М.: Советское радио. 1972. 464 с. [*Lancaster, K*. Mathematical Economics. New York, London: Macmillan Company]
12. *Моришима М.* Равновесие, устойчивость, рост (Многоотраслевой анализ). М.: Наука. 1972. 280 с. [*Morishima, M*. Equilibrium, Stability, and Growth. Oxford: Clarendon Press, 1964]
13. *Горбунов В.К.* Математическая модель потребительского спроса: Теория и прикладной потенциал. М.: Экономика, 2004. 174 с.
14. *Горбунов В.К.* Потребительский спрос: Аналитическая теория и приложения. Ульяновск: УлГУ. 2015. 264 с.
15. *Горбунов В.К.* Модель потребительского спроса, основанная на векторном поле предпочтений // Вестник Моск. ун-та. Сер. 6. Экономика. 2009. № 1. С. 67-79.