Об инвариантных и совместимых классах предпочтений без условия транзитивности

Н. Л. Поляков[1]

[1] Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации

Аннотация

Доклад посвящен новым исследованиям в рамках *метода клонов* в Вычислительной Теории Коллективного Выбора (Computational Social Choice), который впервые был предложен в 2005 г. С. Шелахом и получил дальнейшее развитие в последующее десятилетие. В работе определены понятия инвариантных и совместимых множеств предпочтений общего вида для произвольного правила агрегирования f. Установлено, что в случае, когда множество альтернатив содержит по крайней мере пять элементов, каждое правило агрегирования f Эрровианского типа, сохраняющее множество полных антисимметричных предпочтений и обладающее нетривиальным симметричным классом инвариантных множеств предпочтений, удовлетворяет условию нейтральности. Кроме того, установлено, что при достаточно широких предположениях, каждое правило агрегирования f, обладающее нетривиальным симметричным классом $\mathfrak{D}$ совместимых с правилом f множеств линейных предпочтений, также удовлетворяет условию нейтральности, а каждое множество $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{D}$ нормально, т.е. является подмножеством некоторого инвариантного для правила f множества линейных предпочтений.

Основные определения

Мы рассматриваем стандартную модель коллективного выбора. Даны конечные множества $N = \{1, 2, \dots, n\}$ (участников) и A (альтернатив). Во избежание рассмотрения тривиальных ситуаций будем считать, что $|A| \geq 3$ и $n \geq 2$. *Предпочтения* участников представляют собой, вообще говоря, произвольные рефлексивные бинарные отношения на множестве A. Множество всех возможных предпочтений обозначено символом $\mathcal{R}(A)$. Кортежи $\pi = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathcal{R}(A)$ называются *профилями*. Наиболее важные множества всех полных антисимметричных отношений $P \in \mathcal{R}(A)$ и всех полных антисимметричных и транзитивных отношений (линейных порядков) $P \in \mathcal{R}(A)$ обозначены, соответственно, $\mathcal{CA}(A)$ и $\mathcal{L}(A)$. Элементы множества $\mathcal{L}(A)$ мы будем для краткости записывать в виде последовательностей: запись $a_0 a_1 \dots a_m$ обозначает линейный порядок $\succeq = \{(a_i, a_j) : 0 \leq i \leq j \leq m\}$.

Правилом агрегирования называется любая функция

$$f : (\mathcal{R}(A))^n \to \mathcal{R}(A).$$

Правило агрегирования удовлетворяет условию

- *независимости от посторонних альтернатив* (**IIA**), если

  $$(((x, y) \in P_1 \leftrightarrow (x, y) \in P_1') \,\&\, \dots \,\&\, ((x, y) \in P_n \leftrightarrow (x, y) \in P_n') \to ((x, y) \in f(\pi) \leftrightarrow (x, y) \in f(\pi'))$$

  для всех $\pi = (P_1, \dots, P_n)$, $\pi' = (P_1', \dots, P_n') \in (\mathcal{R}(A))^n$ и $x, y \in A$.

- *единогласия* (**U**), если

  $$(x, y) \in P_1 \cap \dots \cap P_n \to (x, y) \in f(\pi)$$

  для всех $\pi = (P_1, \dots, P_n) \in (\mathcal{P}(A))^n$ и $x, y \in A$.

Хорошо известно (см. [1, 2]), что каждое правило агрегирования, удовлетворяющее **IIA**, может быть определено с помощью *локальных решающих коалиций*. А именно, правило агрегирования $f : (\mathcal{R}(A))^n \to \mathcal{R}(A)$ удовлетворяет **IIA** тогда и только тогда, когда для каждой пары $(x, y) \in A \times A$, $x \neq y$, существует такое множество $\mathfrak{C}^f_{x,y} \subseteq 2^N$, что

$$(x, y) \in f(\pi) \Leftrightarrow \{i \in N : (x, y) \in P_i\} \in \mathfrak{C}^f_{x,y}$$

для всех $\pi = (P_1, \dots, P_n) \in (\mathcal{R}(A))^n$. Если правило f удовлетворяет **IIA**, то условие **U** равносильно условию $N \in \mathfrak{C}^f_{x,y}$ (для всех $x \neq y \in A$).

Для каждого **IIA**-правила $f : (\mathcal{R}(A))^n \to \mathcal{R}(A)$ и непустого множества $B \subseteq A$ можно корректно определить ограничение f_B на множество $\mathcal{R}(B)$ так, чтобы было выполнено условие:

$$f_B(P_1|_B, P_2|_B, \ldots, P_n|_B) = f(P_1, P_2, \ldots, P_n)|_B.$$

для всех $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathcal{R}(A)$ (ограничение $P|_B$ любого бинарного отношения $P \subseteq A^2$ на множество B есть $P \cap B^2$). Правило f_B определяется теми же множествами локальных решающий коалиций, что и правило f:

$$\mathfrak{C}^f_{x,y} = \mathfrak{C}^{f_B}_{x,y}$$

для всех различных $x, y \in B$.

При рассмотрении некоторого правила агрегирования (или некоторого класса таких правил) хочется надеяться, что его применение не выводит за рамки того или иного «естественного» множества множества предпочтений. Последнее свойство имеет по меньшей мере две различных уточняющих формулировки.

Определение 1. Правило агрегирования $f : (\mathcal{R}(A))^n \to \mathcal{R}(A)$ *сохраняет* множество $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}(A)$ (а $\mathcal{D}$ есть *инвариантное множество* правила f), если

$$\pi \in \mathcal{D}^n \to f(\pi) \in \mathcal{D}$$

для всех $\pi \in (\mathcal{R}(A))^n$. Класс всех инвариантных множеств правила f обозначается символом $\mathrm{Inv}\,(f)$.

Определение 2. Пусть f есть n-арное правило агрегирования и $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}(A)$. Множество $\mathcal{D}$ называется *совместимым с парой* $(f, \mathcal{C})$, если $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ и

$$\pi \in \mathcal{D}^n \to f(\pi) \in \mathcal{C}$$

для всех $\pi \in (\mathcal{R}(A))^n$. Класс всех множеств, совместимых с парой $(f, \mathcal{C})$ обозначается символом $\mathrm{Cons}\,(f, \mathcal{C})$.

Очевидно,

$$\mathcal{C} \in \mathrm{Inv}(f) \Leftrightarrow \mathcal{C} \in \mathrm{Cons}\,(f, \mathcal{C}).$$

С другой стороны, для каждой тройки множеств $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}(A)$ если $\mathcal{D}' \in \mathrm{Inv}\,(f)$, то $\mathcal{C} \in \mathrm{Cons}\,(f, \mathcal{D})$.

Определение 3. Пусть даны правило агрегирования $f : (\mathcal{R}(A))^n \to \mathcal{R}(A)$ и множество $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}(A)$. Множество $\mathcal{C} \in \mathrm{Cons}\,(f, \mathcal{D})$ будем называть *нормальным*, если существует такое множество $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{R}(A)$, что

1. $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$,
2. $\mathcal{D}' \in \mathrm{Inv}(f)$.

Пример 1. Пусть $n = 3$ (т.е. $N = \{1, 2, 3\}$). Множество $\mathcal{D} = \{abc, acb, cba, bca\}$ есть инвариантное множество правила maj простого большинства. В этом легко убедиться непосредственно, если заметить, что значение $maj(P_1, P_2, P_3)$ не зависит от перестановки профилей P_1, P_2, P_3 и, кроме того, $maj(P_1, P_2, P_3) \in \{P_1, P_2, P_3\}$ если $|\{P_1, P_2, P_3\}| \leq 2$. Поэтому достаточно проверить $\binom{4}{3} = 4$ варианта:

P_1	P_2	P_3	$maj(P_1, P_2, P_3)$
abc	acb	cba	acb
abc	acb	bca	abc
abc	cba	bca	bca
acb	cba	bca	cba

Видим, что $\{maj(\pi) : \pi \in \mathcal{D}^3\} = \mathcal{D}$, т.е. $\mathcal{C} \in \mathrm{Inv}(maj)$.[1] Поэтому множество $\mathcal{C} = \{abc, acb, cba\}$ есть нормальное множество совместимое с $(maj, \mathcal{L}(A))$.

Нормальные множества совместимые с $(f, \mathcal{L}(A))$ можно найти для правил f весьма далеких от правила простого большинства.

Пример 2. Пусть снова множества N, A и $\mathcal{C}$ такие же как в Примере 1. Правило агрегирования cg есть «правило считалочки»: для всех различных $x, y \in A$

$$(x, y) \in cg(P_1, P_2, P_3) \Leftrightarrow |\{i \in N : (x, y) \in P_i\}| = 1 \pmod 2.$$

Легко убедиться, что правило cg удовлетворяет **U** и **IIA**. Кроме того, значение $cg(P_1, P_2, P_3)$ не зависит от перестановки аргументов P_1, P_2, P_3 и $cg(P_1, P_2, P_3) \in \{P_1, P_2, P_3\}$ если $|\{P_1, P_2, P_3\}| \leq 2$. Поэтому достаточно проверить те же варианты, что и в Примере 1.

P_1	P_2	P_3	$cg(P_1, P_2, P_3)$
abc	acb	cba	bca
abc	acb	bca	cba
abc	cba	bca	acb
acb	cba	bca	abc

[1] Вместо непосредственного подсчета можно было воспользоваться критерием Канеко [4] или [3].

Видим, что $\{cg(\pi) : \pi \in \mathcal{D}^3\} = \mathcal{D}$, т.е. $\mathcal{C} \in \mathrm{Inv}(cg)$. Поэтому множество $\mathcal{C} = \{abc, acb, cba\}$ есть нормальное множество совместимое с $(cg, \mathcal{L}(A))$.

Легко убедиться, что не все множества $\mathcal{D} \in \mathrm{Cons}\,(f, \mathcal{C})$ нормальны даже в том случае, когда $\mathcal{C} = \mathcal{L}(A)$.

Пример 3. Пусть вновь $n = 3$, $A = \{a, b, c\}$, и правило агрегирования задано следующим образом. По парам (a, b) и (b, a) решение принимает единолично первый участник, по парам (b, c) и (c, b) единолично второй участник, а по парам (a, c) и (c, a) решение принимается простым большинством. Иначе говоря,

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^f_{a,b} &= \mathcal{C}^f_{b,a} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\},\\
\mathcal{C}^f_{b,c} &= \mathcal{C}^f_{c,b} = \{\{2\}, \{2, 1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\},\\
\mathcal{C}^f_{a,c} &= \mathcal{C}^f_{c,a} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.
\end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{C} = \{abc, cba\}$. Значение f на всех возможных профилях $\pi \in \mathcal{C}^3$ представлены в таблице

P_1	P_2	P_3	$f(P_1, P_2, P_3)$
abc	abc	abc	abc
abc	abc	cba	abc
abc	cba	abc	acb
abc	cba	cba	cab
cba	abc	abc	bac
cba	abc	cba	bca
cba	cba	abc	cba
cba	cba	cba	cba

Таким образом, $\{f(\pi) : \pi \in \mathcal{C}^3\} \subseteq \mathcal{L}(A)$, значит, $\mathcal{C} \in \mathrm{Cons}(f, \mathcal{L}(A))$. С другой стороны, легко подсчитать, что $f(bca, acb, acb) \notin \mathcal{L}(A)$. Следовательно, $\mathcal{C}$ не включено ни в одно подмножество $\mathcal{L}(A)$, которое сохраняется правилом f.[2]

Совместимые множества линейных предпочтений

Оказывается, в достаточно общем случае можно сформулировать условие, которому должно удовлетворять правило агрегирования f для того, чтобы любое совместимое с парой $(f, \mathcal{L}(A))$ множество было нормальным.

Будем говорить, что правило агрегирования $f : (\mathcal{R}(A))^n \to \mathcal{R}(A)$

- *сохраняет бинарный выбор* (или удовлетворяет **PBC**), если $\mathcal{CA}(A) \in \mathrm{Inv}\,(f)$;
- удовлетворяет условию *бинарной нейтральности* ($\mathbf{N}^0$), если для любых различных $x, y \in A$ и профилей $\pi = (P_1, P_2, \ldots, P_n), \pi' = (P'_1, P'_2, \ldots, P'_n) \in (\mathcal{R}(A))^n$

$$\{i : (x, y) \in P_i\} = \{i : (y, x) \in P'_i\} \to ((x, y) \in f(\pi) \leftrightarrow (y, x) \in f(\pi')).$$

Предложение 1. *Каждое* **IIA**-*правило агрегирование $f : (\mathcal{R}(A))^n \to \mathcal{R}(A)$*

1. *удовлетворяет* **PBC** *тогда и только тогда, когда для всех $X \subseteq N$ и различных $x, y \in A$*

$$N \setminus X \in \mathfrak{C}^f_{x,y} \Leftrightarrow X \notin \mathfrak{C}^f_{y,x},$$

2. *удовлетворяет* $\mathbf{N}^0$ *тогда и только тогда, когда для всех различных $x, y \in A$*

$$\mathfrak{C}^f_{x,y} = \mathfrak{C}^f_{y,x}.$$

Теорема 1. *Пусть $f : (\mathcal{P}(A))^n \to \mathcal{P}(A)$ есть правило агрегирования, удовлетворяющее условиям* **IIA**, **U**, **BCP** *и* $\mathbf{N}^0$. *Тогда следующие условия равносильны*

1. *каждое множество $\mathcal{C}$, совместимое с парой $(f, \mathcal{L}(A))$, нормально;*
2. *для каждого трехэлементного множества $B \subseteq A$ и бинарного отношения $\succeq \in \mathcal{L}(B)$, если множество $\{\succeq, \succeq^{-1}\}$ совместимо с парой $(f|_B, \mathcal{L}(B))$, то оно нормально,*
3. *для любых попарно различных $x, y, z \in A$,*

$$\mathfrak{C}^f_{x,y} \cap \mathfrak{C}^f_{y,z} \subseteq \mathfrak{C}^f_{x,z} \Rightarrow (\mathfrak{C}^f_{x,y} = \mathfrak{C}^f_{x,z} \vee \mathfrak{C}^f_{y,z} = \mathfrak{C}^f_{x,z}).$$

Примеры 1–2 иллюстрируют Теорему 1: в Примерах 1 и 2 все условия Теоремы выполнены, в Примере 3 они все нарушены.

Правило агрегирования $f : (\mathcal{R}(A))^n \to \mathcal{R}(A)$

[2] Вместо непосредственного вычисления $f(bca, acb, acb)$ можно было воспользоваться теоремой Эрроу, если заметить, что $\{f(\pi) : \pi \in \mathcal{C}^3\} = \mathcal{L}(A)$.

- *удовлетворяет условию нейтральности* (**N**), если

$$\{i : (x,y) \in P_i\} = \{i : (u,v) \in P_i\} \to ((x,y) \in f(\pi) \leftrightarrow (u,v) \in f(\pi))$$

для всех $\pi = (P_1, \ldots, P_n) \in (\mathcal{R}(A))^n$ и $x, y, u, v \in A$, таких что $x \neq y$, $u \neq v$ и $\{x, y\} \neq \{u, v\}$.

Предложение 2. *Каждое* **IIA***-правило агрегирование* $f : (\mathcal{R}(A))^n \to \mathcal{R}(A)$ *удовлетворяет* **N** *тогда и только тогда, когда для для всех* $x, y, u, v \in A$*, таких что* $x \neq y$*,* $u \neq v$ *и* $\{x, y\} \neq \{u, v\}$

$$\mathfrak{C}^f_{x,y} = \mathfrak{C}^f_{u,v}.$$

Очевидно, Условие 3 Теоремы 1 выполнено, если правило f удовлетворяет **N**. Поэтому имеет место следствие.

Следствие 1. *Пусть* $f : (\mathcal{R}(A))^n \to \mathcal{R}(A)$ *есть правило агрегирования, удовлетворяющее условиям* **IIA***,* **U***,* **BCP***,* $\mathbf{N}^0$ *и* **N***. Тогда каждое множество* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}(A)$ *совместимое с парой* $(f, \mathcal{L}(A))$ *нормально.*

Симметричные классы совместимых и инвариантных множеств предпочтений

Теперь сосредоточимся на симметричных классах совместимых множеств предпочтений. Пусть σ есть перестановка множества A. Для каждого отношения $P \in \mathcal{R}(A)$ и множества $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}(A)$ положим

$$P_\sigma = \{(\sigma(a), \sigma(b)) : (a, b) \in P\} \text{ и } \mathcal{C}_\sigma = \{P_\sigma : P \in \mathcal{C}\}.$$

Множество $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}(A)$ назовем *симметричным*, если $\mathcal{C}_\sigma = \mathcal{C}$ для любой перестановки σ множества A. Например, множества $\mathcal{CA}(A)$ и $\mathcal{L}(A)$ симметричные. Класс $\mathfrak{C} \subseteq 2^{\mathcal{R}(A)}$ назовем *симметричным*, если

$$\mathcal{C} \in \mathfrak{C} \Rightarrow \mathcal{C}_\sigma \in \mathfrak{C}$$

для любого множества $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}(A)$ и перестановки σ множества A. Например, класс всех множеств *однопиковых* (single-peaked) предпочтений (каждое из которых определяется некоторым линейным порядком) симметричный (см. [5]). Заметим, что если некоторое множество предпочтений $\mathcal{C}$ удовлетворяет какой-то теоретико-множественной формуле φ, не содержащей констант из A, то этой же формуле удовлетворяет и любое множество $\mathcal{C}_\sigma$, поэтому класс всех множеств $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}(A)$, удовлетворяющих такой формуле φ, симметричен.

Определение 4. *Пусть даны множества* $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}(A)$*. Каждое правило агрегирования* $f : (\mathcal{R}(A))^n \to \mathcal{R}(A)$*, для которого* $\mathcal{D} \in \mathrm{Cons}(f, \mathcal{C})$*, будем называть* подходящим *для пары* $(\mathcal{D}, \mathcal{C})$*. Множество всех правил агрегирования* f *(произвольной арности) подходящих для пары* $(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ *обозначим символом* $\mathrm{Conv}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$*. Для каждого класса* $\mathfrak{D} \subseteq 2^{\mathcal{R}(A)}$ *обозначим*

$$\mathrm{Conv}(\mathfrak{D}, \mathcal{C}) = \bigcap_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \mathrm{Conv}(\mathcal{D}, \mathcal{C}).$$

Теорема 2. *Пусть дано конечное множество* A*,* $|A| \geq 5$*, симметричное множество* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{CA}(A)$ *и симметричный класс* $\mathfrak{D} \subseteq 2^{\mathcal{C}}$*. Тогда выполнено одно из двух следующих условий:*

1. *Каждое из правил* $f \in \mathrm{Conv}(\mathfrak{D}, \mathcal{C})$*, которое удовлетворяет* **IIA***,* **U** *и* **BCP***, удовлетворяет и* **N***.*

2. *Для каждых двух пар* $(x, y), (u, v) \in A^2$*, для которых* $x \neq y$*,* $u \neq v$ *и* $\{x, y\} \neq \{v, u\}$*, натурального числа* $n \geq 2$ *и профиля* $\pi = (P_1, P_2, \ldots, P_n) \in (\mathcal{CA}(A))^n$*, для которого*

$$\{i : (x, y) \in P_i\} = \{i : (u, v) \in P_i\} \notin \{\emptyset, N\}.$$

   существует такое правило $f \in \mathrm{Conv}(\mathfrak{D}, \mathcal{C})$*, удовлетворяющее* **IIA***,* **U** *и* **BCP***, что*

$$(x, y) \in f(\pi) \text{ и } (u, v) \notin f(\pi).$$

Замечание 1. *Условие 2 Теоремы 2 эквивалентно следующему:*

2'. *Для любых* $x, y, u, v \in A$*, таких что* $x \neq y$*,* $u \neq v$ *и* $\{x, y\} \neq \{u, v\}$ *существует такое правило* $f \in \mathrm{Conv}(\mathfrak{D}, \mathcal{C})$*, удовлетворяющее* **IIA***,* **U** *и* **BCP***, что*

$$\mathfrak{C}^f_{x,y} \neq \mathfrak{C}^f_{u,v}.$$

Из Теорем 1 и 2 следует весьма сильный результат для симметричных классов линейных порядков, содержащихся в $\mathrm{Cons}(f, \mathcal{L}(A))$ для произвольного правила f, удовлетворяющего **IIA**, **U**, **BCP** и $\mathbf{N}^0$. Множество $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{CA}(A)$ назовем *тривиальным*, если

$$\mathcal{C} = \{P \in \mathcal{CA}(A) : Q \subseteq P\}$$

для некоторого бинарного отношения $Q \in \mathcal{R}(A)$. Например, любое одноэлементное множество $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{CA}(A)$ и множество $\{abc, acb\} \in \mathcal{L}(\{a, b, c\})$ тривиальны. Легко проверить, что тривиальное множество сохраняется каждым правилом агрегирования, удовлетворяющим **IIA**, **U** и **BCP**. Класс $\mathfrak{D} \subseteq 2^{\mathcal{CA}(A)}$ назовем *тривиальным*, если он состоит только из тривиальных множеств.

Теорема 3. *Пусть дано конечное множество A, $|A| \geq 5$, нетривиальный симметричный класс $\mathfrak{D} \subseteq 2^{\mathcal{L}(A)}$, натуральное число $n \geq 2$ и правило агрегирования $f : (\mathcal{R}(A))^n \to \mathcal{R}(A)$, которое удовлетворяет* **IIA**, **U**, **BCP** *и* $\mathbf{N}^0$. *Пусть $\mathfrak{D} \subseteq \mathrm{Cons}(f, \mathcal{L}(A))$. Тогда:*

1. *Правило f удовлетворяет* **N**.
2. *Каждое множество $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$ нормально.*

Теория симметричных классов инвариантных множеств предпочтений устроена проще.

Определение 5. *Пусть даны множества $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}(A)$. Каждое правило агрегирования $f : (\mathcal{R}(A))^n \to \mathcal{R}(A)$, для которого $\mathcal{D} \in \mathrm{Inv}(f)$, будем называть* полиморфизмом *множества $\mathcal{D}$. Множество всех полиморфизмов f (произвольной арности) множества $\mathcal{D}$ обозначим символом $\mathrm{Pol}(\mathcal{D})$. Для каждого класса $\mathfrak{D} \subseteq 2^{\mathcal{R}(A)}$ обозначим*

$$\mathrm{Pol}(\mathfrak{D}) = \bigcap_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \mathrm{Pol}(\mathcal{D}).$$

Очевидно, если $f \in \mathrm{Pol}(\mathfrak{D})$ и $\bigcup \mathfrak{D} \subseteq \mathcal{C}$, то $f \in \mathrm{Conv}(\mathfrak{D}, \mathcal{C})$.

Теорема 4. *Пусть дано конечное множество A, $|A| \geq 5$ и нетривиальный симметричный класс $\mathfrak{D} \subseteq 2^{\mathcal{CA}(A)}$. Тогда каждое из правил $f \in \mathrm{Pol}(\mathfrak{D})$, которое удовлетворяет* **IIA**, **U** *и* **BCP**, *удовлетворяет и* **N**.

Заключительные замечания

Теоремы 3 и 4 предоставляют широкие возможности классификации симметричных классов множеств предпочтений, которые состоят из инвариантных для некоторого правила f множеств или множеств, совместимых с парой $(f, \mathcal{L}(A))$, для произвольного правила f из достаточно широкого и естественного класса. Эта классификация (как и Теорема 4) может быть получена с помощью *метода клонов* в Computational Social Choice, предложенного С. Шелахом [6] и развитого автором [7, 8].

Приложение. Условие $\mathbf{N}^0$ в Теореме 1 существенно

Очевидно, то первое условие Теоремы 1 влечет второе условие для любого **IIA**-правила f. Импликация $3 \Rightarrow 2$ также не требует условия $\mathbf{N}^0$. Покажем, что тем не менее условие $\mathbf{N}^0$ нельзя опустить.

Пример 4. Пусть $n = 3$ (т.е. $N = \{1, 2, 3\}$) и $A = \{a, b, c\}$. Определим правило $f : (\mathcal{R}(A))^n \to \mathcal{R}(A)$ с помощью локальных решающих коалиций (следовательно, правило f удовлетворяет **IIA**):

$$\mathfrak{C}^f_{a,b} = \{\{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\} \qquad \mathfrak{C}^f_{b,a} = \{\{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$$
$$\mathfrak{C}^f_{b,c} = \{\{1,2,3\}\} \qquad \mathfrak{C}^f_{c,b} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$$
$$\mathfrak{C}^f_{a,c} = \{\{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\} \qquad \mathfrak{C}^f_{c,a} = \{\{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Очевидно, правило f удовлетворяет **U**. Используя Предложение 1, легко убедиться, что правило f удовлетворяет **U**, **BCP** и не удовлетворяет $\mathbf{N}^0$. Рассмотрим множество $\mathcal{C} = \{abc, bca, cab\} \subseteq \mathcal{L}(A)$. Значение f на всех возможных профилях $\pi \in \mathcal{C}^3$ представлены в таблице

P_1	P_2	P_3	$f(P_1,P_2,P_3)$	P_1	P_2	P_3	$f(P_1,P_2,P_3)$	P_1	P_2	P_3	$f(P_1,P_2,P_3)$
abc	abc	abc	abc	bca	abc	abc	abc	cab	abc	abc	acb
abc	abc	bca	abc	bca	abc	bca	bac	cab	abc	bca	acb
abc	abc	cab	acb	bca	abc	cab	acb	cab	abc	cab	acb
abc	bca	abc	bac	bca	bca	abc	bca	cab	bca	abc	cba
abc	bca	bca	bca	bca	bca	bca	bca	cab	bca	bca	cba
abc	bca	cab	cba	bca	bca	cab	cba	cab	bca	cab	cba
abc	cab	abc	acb	bca	cab	abc	cab	cab	cab	abc	cab
abc	cab	bca	cab	bca	cab	bca	cba	cab	cab	bca	cab
abc	cab	cab	cab	bca	cab	cab	cab	cab	cab	cab	cab

Таким образом, $\{f(\pi) : \pi \in \mathcal{C}^3\} \subseteq \mathcal{L}(A)$, значит, $\mathcal{C} \in \mathrm{Cons}(f, \mathcal{L}(A))$. Более того, $\{f(\pi) : \pi \in \mathcal{C}^3\} = \mathcal{L}(A)$, значит, множество $\mathcal{C}$ не нормально по теореме Эрроу.

С другой стороны, легко убедиться, что ни оно из бинарных отношений

$$f(bca, acb, bca),\ \ f(abc, cba, abc),\ \ f(cab, bac, cab)$$

не принадлежит $\mathcal{L}(A)$, а значит, каждое множество вида $\{\succeq, \succeq^{-1}\}$, $\succeq \in \mathcal{L}(A)$ не совместимо с парой $(f, \mathcal{L}(A))$. Следовательно, условие 2 Теоремы 1 выполнено. Итак, в отсутствии $\mathbf{N}^0$ импликация $2 \Rightarrow 1$ тоже не имеет места. Кроме того,

$$\mathfrak{C}^f_{a,b} \cap \mathfrak{C}^f_{b,c} \subseteq \mathfrak{C}^f_{a,c},$$

однако все три множества $\mathfrak{C}^f_{a,b}, \mathfrak{C}^f_{b,c}, \mathfrak{C}^f_{a,c}$ попарно различны, т.е. нарушено условие 3. Таким образом, в отсутствии $\mathbf{N}^0$ импликация $2 \Rightarrow 3$ не имеет места.

Следующий пример опровергает импликацию $1 \Rightarrow 3$.

Пример 5. Определим правило $f : (\mathcal{R}(A))^n \to \mathcal{R}(A)$ с помощью локальных решающих коалиций (следовательно, правило f удовлетворяет **IIA**):

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{C}^f_{a,b} = 2^N \setminus \{\emptyset\} & \mathfrak{C}^f_{b,a} = \{N\} \\
\mathfrak{C}^f_{b,c} = 2^N \setminus \{\emptyset\} & \mathfrak{C}^f_{c,b} = \{N\} \\
\mathfrak{C}^f_{a,c} = \{N\} & \mathfrak{C}^f_{c,a} = 2^N \setminus \{\emptyset\}
\end{array}$$

Легко убедиться, что правило f удовлетворяет **IIA**, **U**, **BCP** и не удовлетворяет $\mathbf{N}^0$.

Обозначим $\mathcal{L}_0 = \{abc, bca, cab\}$. Легко проверить, что следующие множества $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}(A)$ не совместимы с парой $(f, \mathcal{L}(A))$:

1. Любые двухэлементные множества $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}_0$,
2. Любые множества $\mathcal{C} = \{\succeq, \succeq^{-1}\}$, где $\succeq \in \mathcal{L}(A)$,
3. Трехэлементное множество $\mathcal{L}(A) \setminus \mathcal{L}_0$.

Отсюда следует, что каждое множество $\mathcal{C} \in \mathrm{Cons}(f, \mathcal{L}(A))$ содержит не более трех элементов, а среди трехэлементных множеств $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}(A)$ совместимыми с парой $(f, \mathcal{L}(A))$ могут оказаться только множества $\mathcal{C}_1 = \{abc, bac, acb\}$, $\mathcal{C}_2 = \{cab, cba, acb\}$, $\mathcal{C}_3 = \{bca, cba, bac\}$. Непосредственной проверкой легко установить, что все они принадлежат $\mathrm{Inv}(f)$. Кроме того, каждое двухэлементное множество $\mathcal{D} \in \mathrm{Cons}(f, \mathcal{L}(A))$ есть подмножество одного из множеств $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$. Каждое одноэлементное и пустое множество $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}(A)$, конечно, инвариантно относительно f. Таким образом, каждое множество $\mathcal{C} \in \mathrm{Cons}(f, \mathcal{L}(A))$ нормально. Однако,

$$\mathfrak{C}^f_{a,c} \cap \mathfrak{C}^f_{c,b} \subseteq \mathfrak{C}^f_{a,b},\ \text{но}\ \mathfrak{C}^f_{a,c} \neq \mathfrak{C}^f_{a,b}\ \text{и}\ \mathfrak{C}^f_{c,b} \neq \mathfrak{C}^f_{a,b}.$$

Список литературы

[1] Arrow K. Social Choice and Individual Values. 2 edition. Yale University Press (1963).

[2] Aleskerov F. T. Arrovian Aggregation Models. Springer US (1999).

[3] Sen A. K. A Possibility Theorem on Majority Decisions. Econometrica, vol. 3, no. 4 (1966), pp. 491–499.

[4] Kaneko Mamoru. Necessary and Suffient Condition for Transitivity in Voting Theory. Journal of Economic Theory, vol. 11 (1975), pp. 385–393.

[5] Moulin, H. Axioms of Cooperative Decision Making. Cambridge University Press (1991).

[6] Shelah S. On the Arrow property. Adv. in Ap. Mat., vol. 34 (2005), pp. 217–251.

[7] Polyakov N. Shamolin M. On a generalization of Arrow's impossibility theorem. Doklady Mathematics, vol. 89, no. 3 (2014), pp. 290-292.

[8] Polyakov, N. Galois connections for classes of discrete functions and their application to mathematical problems of social choice theory. PhD thesis. Moscow University (2016).