BREXIT НА ЯЗЫКЕ МАТЕМАТИКИ: ИГРЫ ТЕРНАРНОГО ВЫБОРА НА ГРАФАХ

Леонидов А.В., Савватеев А.В., Семёнов А.Г.

6 октября 2016 г.

Рассмотрим какую-нибудь страну, например Великобританию, и стоящий перед ней бинарный выбор. В этих условиях каждый житель страны должен выбрать одну из трёх (не двух) стратегий поведения: (-1) - "топить"против выхода, (0) - воздержаться, (1) - агитировать за выход из Европейского Союза.

Предполагается, что соответствующее поведение реализуется и в выборе стратегии на самом референдуме (прийти/не прийти, и как голосовать). Но самое главное - это то, что игроки соотносят свои стратегии поведения с теми стратегиями, которые принимают их друзья, соседи и т.д.

Следует заметить, что математически нижеописанная модель годится не только для изучения Brexit, но и для описания любого глубокого социального конфликта, в том числе и "украинского раскола"в русскоязычном мире.

Выигрыш игрока зависит не только от того, каково соотношение выбранного поведения с его внутренними экзогенными установками, но также и от степени конформности стратегии этого индивида со стратегиями его окружения.

Запишем соответствующую модель на произвольном графе социальных связей.

Пускай N — множество игроков (или узлов социальной сети). Каждый из них обладает внутренним мнением по поводу выхода или невыхода Великобритании из ЕС (соответственно, по поводу “правой” стороны в русско-украинском конфликте).

Так как мнение может быть и “склонением” в пользу того или иного варианта ответа, то его мы формализуем в виде вещественной переменной $v_i \in \mathbf{R}$, модуль которой обозначает степень убеждённости, а знак - выбор стороны того или иного рассматриваемого конфликта.

Взаимодействие узлов сети, то есть социальное взаимодействие в чистом виде, задаётся матрицей с вырезанной диагональю: социальное влияние вершины i на вершину j (то есть влияние i-го игрока на j-того) задано в виде величины a_{ij}. Заметим, что влияние может быть и "отрицательным" (когда мнение i-го игрока для j-го является отталкивающим, см. ниже). Заметим, что матрица влияний совершенно не обязана быть симметричной даже по знакам: в общем случае речь идёт о совершенно произвольной вещественнозначной матрице.

Суммируя начальные данные игры, задача ставится для проивзольной вещественнозначной матрицы, где на главной диагонали мы расставим значения v_i, а вне главной диагонали — влияния игроков друг на друга.

Можно интерпретировать v_i как степень важности мнения игрока для самого себя, но не как "степень влияния i на i" (это будет ясно из ниже описанной формализации игры).

Переходим к описанию игрового взаимодействия и игровых решений узлов сети.

А именно, каждый игрок i выбирает одну из трёх стратегий σ_i (как бы "проекцию" своих воззрений и своей сетепени конформности общественному мнению на множество из трёх элементов): "быть за" ($\sigma_i = 1$), "быть против" ($\sigma_i = -1$) и "воздержаться" ($\sigma_i = 0$). Например, это его решение относительно референдума, или какого-то участия в спорах и т.п.

Для нас важно то, что при принятии решения игрок исходит из функции выигрыша следующего стат-физического вида (см. обсуждение ниже):

$$u_i(\sigma) = u_i(\sigma_i, \sigma{-}i) = \left[v_i + \sum_{j \neq i} a_{ji}\sigma_j \right] \sigma_i. \tag{1}$$

По аналогии со знаменитыми стат-физическими моделями, мы вводим теперь в рассмотрение концепцию решения, разработанную вместо равновесия Нэша для матричных игр, а именно концепцию *равновесия дискретного отклика.*

Это означает, что при вычислении выигрыша происходит случайный шум: ко всем выигрышам добавляются стратего-специфические случайные переменные, одинаково и независимо распределённые некоторым заданным образом. Подробности см. Палфри и Маккельви [1, 2].

На основе анализа описанной модели мы выводим уравнения, которые поразительным образом совпадают (или почти совпадают), для равновесия дискретного отклика с логистической функцией распределения случайной компоненты полезности, с уравнениями, выводимыми в статфизических моделях Изинга и Поттса на графах [3].

Получить точное решение последних можно только для полных графов. Для графов произвольной топологии описаны только приближенные методы решения (подход Бете-Пайерлса) [3]. Отметим, что статфизические модели содержат в себе единый для всех целевой функционал.

Всё это совершенно невероятно, и пока до конца нами не понято и не осознано.

Кроме того, следует отметить, что на полном графе похожие модели изучались Гранноветтером [4], исследователями из ИПУ РАН (отдела член-корр. Д.А.Новикова) [6], Броком, Дурлауфом [5, 9, 10], Блюмом [7, 8], а также целым рядом исследователей [11, 12, 13, 14]. Пора навести полный порядок в этой области знания. А для начала нужно попытаться вывести характеристики системы уравнений, определяющих в поставленной задаче равновесие дискретного отклика (наиболее разумный вид решения, применяемый для игр очень большого числа участников вместо Нэша), и запустить их на компьютере. Или исхитриться и решить данную систему в явной форме после введения разумных упрощающих (агрегирующих) предположений.

Поставленные задачи - это программа для новых и, как нам кажется, в высшей степени перспективных и актуальных исследований в области теории игр.

Список литературы

[1] McKelvey R. D., Palfrey T. R. Quantal response equilibria for normal form games // Games and economic behavior. 1995. Vol. 10, (1). Pp. 6-38.

[2] McKelvey R. D., Palfrey T. R. Quantal response equilibria for extensive form games // Experimental Economics. 1998. Vol. 1, (1). Pp. 9–41.

[3] Dorogovtsev S.N., Goltsev V., Mendes J.F.F., Critical Phenomena in Complex Networks // Reviews of Modern Physics. 2008. Vol. 80. Pp. 1275-1335

[4] Granovetter M. Threshold Models of Collective Behavior // The American Journal of Sociology. 1978. Vol. 83, (6). Pp. 1420-1443.

[5] Brock W.A., Durlauf S.N., Multinomial Choice in the Social Interactions, in The Economy as an Evolving Complex System III: Current Perspectives and Future Directions // eds. L. Blume, S.N. Durlauf. 2006. Oxford University Press

[6] Бреер В.В., Новиков Д.А., Рогаткин А.Д. Микро- и макромодели социальных сетей. Ч. 1. Основы теории // Проблемы управления. 2014. № 5. С. 28-33. Brock W.A., Durlauf S.N., Multinomial Choice in the Social Interactions, in The Economy as an Evolving Complex System III: Current Perspectives and Future Directions // eds. L. Blume, S.N. Durlauf. 2006. Oxford University Press

[7] Blume L. E. The Statistical Mechanics of Strategic Interaction // Games and Economic Behavior. 2003. 5. Pp. 387-424.

[8] Blume L., Durlauf S. Equilibrium Concepts for Social Interaction Models // International Game Theory Review. 2003. Vol. 5, (3). Pp. 193-209.

[9] Durlauf S., How can statistical mechanics contribute to social science? // Procceedings National Academy of Sciences of the USA. 199. Vol. 96. Pp. 10582-10584

[10] Durlauf S.N., Ioannides Y.M., Social Interactions // Annual Revies Economics. 2010. Vol. 2. Pp. 451-478

[11] Weidlich W. Physics and Social Science – the Approach of Synergetics // Physics Reports. 1991. Vol. 204, (1) Pp. 1-163

[12] Gordon M.B. et al., Discrete Choices under Social Influence: generic Perspectives // Mathematical Models and methods in Applied Science. 2009. Vol. 19. Pp. 1441-1381

[13] Bouchaud J.-P., Crises and Collective Socio-Ecoonomic Phenomena: Simple Models and Challenges // Journal of Statistical Physics. 2013. Vol. 51, (3). Pp. 567-606

[14] Sornette D., Physics and financial economics (1776-2014): puzzles, Ising and agent-based models // Reports on Progress in Physics. 2014. Vol. 77, (6). Pp. 1-28