УДК 519.816

Оценка вероятностей прогнозируемых событий

А.Г. Мадера

доктор наук, профессор департамента математики факультета экономических наук
Высшая школа экономики (национальный исследовательский университет), Москва, alexmadera@mail.ru

Аннотация. Разработан метод оценивания вероятностей актуализации будущих событий, являющихся последствиями принятых субъектом решений. Метод основан на совмещении двух типов прогнозов – объективного прогноза наступления событий, использующего статистические данные о прошлых релевантных прогнозах эксперта, а также субъективного прогноза с помощью экспертных оценок. По обоим видам данных формируются две матрицы, одна из которых (L) характеризует погрешности прогнозирования, известные из прошлых периодов, другая (M) – содержит уточненные оценки, полученные на основании новой информации, поступившей в настоящий момент времени. Произведение указанных матриц формирует полную матрицу погрешностей прогнозирования $K = M \cdot L$, присущих субъекту, в том числе и эксперту (как индивидуальному, так и коллективному), при совершении прогнозов. Показано, что при наличии статистических данных о точности и надежности прогнозов, могут быть найдены вероятности будущих событий, значения которых не зависят от первоначальных априорных вероятностей. При этом прогнозируемые вероятности будущих событий $P(A)$ образуют собственный вектор матрицы K надежности прогнозов эксперта, соответствующий ее единичному собственному значению, то есть $P(A) = K \cdot P(A)$. Искомый вектор вероятностей прогнозируемых событий $P(A)$ определяется из решения системы уравнений $P(A) = K \cdot P(A)$ и условия нормировки вероятностей $\sum_{i=1}^{n} p(A_i) = 1$. Метод позволяет существенно увеличить степень адекватности прогнозных оценок вероятностей наступления будущих событий при одновременном уменьшении субъективности оценок.

При принятии решения необходимо учитывать неопределенный характер будущего, в котором актуализируются те или иные последствия и результаты принятых субъектом решений. Какое именно из них наступит в реальности, по какому пути пойдет развитие событий, *априори* неизвестно, как и не известно будет ли достигнута поставленная субъектом цель. Прежде чем принять решение субъект вынужден осуществить прогнозирование состояний неопределенного будущего, возможность достижения желаемого результата, равно как и вероятности возможной актуализации различных последствий принятых решений.

Между тем, любой прогноз наступления будущих событий носит субъективный характер, поскольку выполняется субъектом, экспертом (коллективным, или индивидуальным), способности которого к прогнозированию будущих событий и оценке вероятностей их наступления, весьма ограничены [1, 2, 3].

В большинстве случаев, прогнозирование будущих событий и вероятностей их наступления, основывается на допущении, что прошлое и будущее неразличимы между собой, так что тенденции, наблюдаемые в прошлом сохраняют свой характер и в будущем. При этом методом прогнозирования является простая экстраполяция, в которой тенденции прошлого, полученные по данным за прошлые периоды, распространяются и на будущие периоды, а в качестве средства представления прошлых данных выступают разнообразные регрессии, временные ряды, многочисленные виды усреднений за прошлые периоды, скользящих средних, сглаживаний, и пр. Такая прогнозная концепция свидетельствует о том, что люди, как правило, недооценивают, а зачастую, вообще пренебрегают степенью неопределенности будущего. Множество методов прогнозирования в области финансовых и товарных рынков используют *гипотезу о стохастическом характере* финансовых инструментов (курсов акций, валют, цен на сырье, энергоносители, недвижимость, и пр.) – и это несмотря на то, что данная гипотеза до сих пор не нашла своего подтверждения на практике. Более того, многочисленные исследования и факты показывают, что будущие цены невозможно предсказать по историческому временному ряду их изменения за прошлые периоды, причем предсказанные и наблюдаемые в реальности цены по всем видам сырья, курсам акций и валют, могут различаться между собой в несколько раз [4, 5]. И, наконец, в тех случаях, когда данные по прогнозированию событий, релевантных объекту изучения за прошлые периоды отсутствуют или их количество недостаточно для анализа, прибегают к оценкам, так называемых, экспертов, чьи оценки, как показано в [1], практически не отличаются от оценок остальных субъектов, не позиционируемых в качестве экспертов, иначе говоря, значимого различия между ними не выявлено.

Что касается вероятностей будущего наступления прогнозируемых событий, то они оцениваются, как правило, либо с помощью байесовской концепции. Согласно Байесу рассматриваются гипотезы – несовместные события $A_1, A_2, \ldots, A_n$, образующие полную группу при допущении, что вероятности наступления $p(A_j)$ *априори* известны. После проведения некоего опыта, в результате которого наступает некое событие *B*, по формуле Байеса $p(A_i \mid B) = p(A_i)\, p(B \mid A_i) \Big/ \sum_{j=1}^{n} p(A_j)\, p(B \mid A_j)$ определяются *апостериорные* вероятности $p(A_i \mid B)$, уточняющие априорные вероятности $p(A_j)$, причем условные вероятности $p(B \mid A_j)$ также считаются известными *априори*. Однако при рассмотрении событий, появляющихся в результате человеческой деятельности (в экономике, менеджменте, финансах и пр.), вероятности будущих событий $p(A_j)$ не известны *априори* в принципе. То же относится и к условным вероятностям $p(B \mid A_j)$, которые также *априори* неизвестны, хотя, могут быть получены при наличии статистических данных по прогнозированию релевантных событий в прошлые периоды; в этом случае условные вероятности $p(B \mid A_j)$ могут трактоваться как погрешности прогнозирования.

Сложность прогнозирования неопределенного будущего (к какой бы сфере человеческой деятельности оно не относилось) обусловливается множеством неопределенных факторов, необратимой изменчивостью окружающей среды, субъекта, процесса взаимодействия субъекта со средой и социумом, и пр. [3, 6]. В силу этого комплекс условий, при котором происходит то или иное событие, является невоспроизводимым, что делает любые события, которые могут произойти в будущем, уникальными и единичными. Иными словами, прогнозируемые события не могут рассматриваться как случайные объекты, к которым применимы понятия классической, статистической вероятностей, поскольку не удовлетворяют условиям массовости, однородности, неограниченной воспроизводимости идентичных условий и устойчивостью частот. Поэтому при оценивании вероятностей возможного наступления будущих событий необходимо рассматривать их как *субъективные вероятности*, значения которых определяются субъектом, исходящим как из собственного понимания ситуации, и развития событий, так и наблюдаемых в настоящий момент тенденций. При этом всегда следует принимать во внимание, что способности субъекта к прогнозированию будущих последствий и вероятностей их наступления весьма ограничены [1, 2, 3].

В настоящей работе предлагается метод оценивания вероятностей $P(A)=(p(A_1), p(A_2),\dots, p(A_n))$ наступления прогнозируемых событий $A_1, A_2,\dots, A_n$, который позволяет существенно уменьшить степень субъективизма прогнозирования. Метод основан на данных по прогнозированию релевантных событий за прошлые периоды, а также новой информация о наблюдаемых в настоящий момент времени тенденциях. Данные за прошлые периоды характеризуют погрешности, присущие субъекту при прогнозировании событий и оценивании их вероятностей, а данные, получаемые из информации относительно развития событий и тенденциях, наблюдаемых в настоящем, позволяют провести их коррекцию. По указанным двум видам данных формируются две матрицы, одна из которых представляет собой матрицу погрешностей, присущих субъекту при прогнозировании (L), а другая – матрицу уточненных прогнозов (M), сделанных субъектом на основании получаемой информации на настоящий момент времени. В работе показывается, что вектор вероятностей наступления прогнозируемых событий $P(A)$ представляет собой *собственный вектор* полной матрицы погрешностей прогнозирования $K = M \cdot L$, отвечающий ее единичному собственному значению, а именно: $K \cdot P(A) = \lambda P(A)$, $\lambda = 1$.

Субъект, как указывалось выше, не обладает способностью однозначно и с абсолютной точностью предсказывать какое именно событие наступит в будущем и какова будет вероятность его наступления. Тем не менее, он может попытаться сформировать множество событий, которые, по его мнению, произойдут в будущей реальности, релевантных его области деятельности и принятия решений. Множество **А** с n возможными событиями A_1, A_2,…, $A_n \in$ **А**, называемыми далее *реальными событиями*, образует полную группу и $\sum_{i=1}^{n} p(A_i) = 1$, при этом вероятности $p(A_1), p(A_2), \dots, p(A_n)$ *априори* неизвестны и подлежат определению. Далее субъект наблюдает за другими событиями B_1, B_2,…, $B_n \in$ **B** и по ним прогнозирует наступление в будущем тех или иных реальных событий A_1, A_2,…, $A_n \in$ **А**. События B_1, B_2,…, $B_n \in$ **B**, называемые далее *прогнозирующими событиями*, также образуют полную группу и $\sum_{i=1}^{n} p(B_i) = 1$.

Так как никакое событие, наблюдаемое в прошлом или в настоящем, не может однозначно и абсолютно достоверно обусловливать наступление какого-либо реального события в будущем, то прогноз субъекта о наступлении того или иного реального события $A_j \in$ **А** (j = 1,2,…,n), основанный на наблюдении событий $B_i \in$ **B**, (i = 1,2,…,n), не может быть достоверным в принципе. Поэтому событие $B_i \in$ **B**, (i = 1,2,…,n) прогнозирующее (по мнению субъекта) наступление реального события $A_j \in$ **А**, может появиться совместно с любым из событий A_1, A_2,…, $A_n \in$ **А**, свидетельствуя тем самым, что прогноз наступления в будущем реального события $A_j \in$ **А** (j = 1,2,…,n) по наблюдаемым событиям $B_i \in$ **B**, (i = 1,2,…,n) всегда осуществляется с некоторой погрешностью. Погрешности прогнозирования характеризуется следующими составляющими:

– погрешностью прогнозирования события из множества **А** на основании наступления прогнозирующего события B_i, в то время как на самом деле реализовалось событие A_j, то есть условной вероятностью $p(B_i|A_j)$. Эта погрешность может быть определена по доступным статистическим данным прогнозирования релевантных событий в прошлые периоды;

– погрешностью прогноза наступления реального события A_j, который дается субъектом на основании возможного наступления прогнозирующего события B_i в настоящий момент времени, то есть условной вероятностью $p(A_j|B_i)$, отражающей его субъективную убежденность в достоверности своего прогноза.

Имея в своем распоряжении погрешности прогнозирования $p(B_i|A_j)$, i, j = 1,2,…,n, известных из прошлого опыта, по формуле полной вероятности систему получим n равенств, относительное вероятностей $p(B_i)$ (i = 1,2,…,n): $p(B_i) = \sum_{j=1}^{n} p\big(A_j\big)p\big(B_i\big|A_j\big)$. Эта система после введения вектора полных вероятностей прогнозирующих событий $P(B) = (p(B_1), p(B_2), \dots, p(B_n))^T$ $((\cdot)^T$ – операция транспонирования), вектора искомых вероятностей прогнозируемых реальных событий $P(A) = (p(A_1), p(A_2), \dots, p(A_n))^T$, $n{\times}n$-матрицы погрешностей прогнозирования $L = ||p\big(B_i\big|A_j\big)||$ релевантных событий в прошлые периоды:

$$L = \begin{pmatrix} p(B_1|A_1) & \cdots & p(B_1|A_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p(B_n|A_1) & \cdots & p(B_n|A_n) \end{pmatrix},$$

может быть записано в матричном виде $P(B) = L \cdot P(A)$.

Матрица L является стохастической, или марковской, векторы $P(A)$ и $P(B)$ – вероятностными, и обладают, как известно, следующими свойствами: (a) произведение стохастической матрицы на вероятностный вектор дает вероятностный вектор, (b) произведение двух стохастических матриц является стохастической матрицей, (c) максимальное собственное значение стохастической матрицы равно 1.

При прогнозировании событий и вероятностей их наступления субъект ориентируется не только на данные о прогнозах релевантных событий, совершенных в прошлые периоды, но и на новую информацию и наблюдая за тенденциями в настоящий момент времени. На основании новой информации субъект строит прогноз о наступлении будущих реальных событий, основываясь на предположениях о возможном наступлении того или иного прогнозируемого реального события $A_j \in \mathbf{A}$ (j = 1,2,…,n), при условии реализации прогнозирующих событий $B_i \in \mathbf{B}$ (i = 1,2,…,n). Субъект оценивает условные вероятности $p(A_j|B_i)$ наступления реальных событий $A_j \in \mathbf{A}$ (j = 1,2,…,n), при условии возможного наступления прогнозирующих событий $B_i \in \mathbf{B}$ (i = 1,2,…,n) в настоящий момент времени. Величина условной вероятности $p(A_j|B_i)$, отражает, с одной стороны, степень убежденности субъекта в наступлении реальных событий $A_j \in \mathbf{A}$ (j = 1,2,…,n) в случае, если наступит прогнозирующее событие $B_i \in \mathbf{B}$, а с другой – погрешность прогноза, которая в полной мере выявится лишь после реализации событий в будущем.

По формуле полной вероятности получаем систему n равенств определяющих вероятности $p(A_j)$ наступления реальных событий A_j (j = 1,2,…,n) $p(A_j) = \sum_{i=1}^{n} p(B_i)p(A_j|B_i)$, которая после введения $n\times n$-матрицы $M = ||p(A_j|B_i)||$

$$M = \begin{pmatrix} p(A_1|B_1) & \cdots & p(A_1|B_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p(A_n|B_1) & \cdots & p(A_n|B_n) \end{pmatrix},$$

может быть записана в матричном виде $P(A) = M \cdot P(B)$. Матрица M, подобно матрице L, является стохастической и удовлетворяет условиям (a), (b) и (c), приведенным выше.

В соответствии с полученными результатами вероятности прогнозирующих $P(B)$ и прогнозируемых реальных событий $P(A)$, которые актуализируются в будущем, связаны между собой матричными равенствами $P(B) = L \cdot P(A)$ и $P(A) = M \cdot P(B)$. Подставляя в правую часть выражения $P(A) = M \cdot P(B)$ вместо вектора $P(B)$ его выражение из матричного равенства $P(B) = L \cdot P(A)$, получим уравнение для определения искомого вектора вероятностей прогнозируемых реальных событий $P(A)$:

$$P(A) = K \cdot P(A),$$

где $K = M \cdot L$ – стохастическая $n \times n$-матрица(см. свойство (b)).

Полученное матричное уравнение свидетельствует, что искомый вектор вероятностей $P(A) = (p(A_1), p(A_2), \dots, p(A_n))^T$ наступления реальных событий $A_i \in \mathbf{A}$, $i = 1,2,\dots,n$, представляет собой собственный вектор стохастической матрицы $K = M \cdot L$, соответствующий ее единичному собственному значению. Матрица $K = M \cdot L$ представляет собой полную матрицу погрешностей прогнозирования и полностью определяет присущие субъекту (эксперту) погрешность при составлении прогнозов.

Искомый вектор вероятностей прогнозируемых событий $P(A)$ определяется из решения матричной системы уравнений $P(A) = K \cdot P(A)$ совместно с дополнительным уравнением, описывающим условие нормировки вероятностей, то есть $\sum_{i=1}^{n} p(A_i) = 1$.

Литература

1. Канеман Д., Словик П., Тверски А. Принятие решений в неопределенности: Правила и предубеждения. – Харьков: «Гуманитарный центр», 2005.
2. Мадера А.Г. Метод прогнозирования вероятностей актуализации последствий принятых решений в условиях неопределенности // Менеджмент в России и за рубежом. – 2012. – № 6. – С. 21-29.
3. Мадера А.Г. Риски и шансы: неопределенность, прогнозирование и оценка. – М.: URSS, 2014.
4. Мантенья Р.Н., Стенли Г.Ю. Введение в эконофизику: Корреляция и сложность в финансах. – М.: URSS, 2009.
5. Международная практика прогнозирования мировых цен на финансовых рынках (сырье, акции, курсы валют) / Под ред. Я.М. Миркина. – М.: Магистр, 2014.
6. Madera A.G. Estimating the probability of forecasted events // International Journal of Accounting and Economics Studies. 2016. Vol. 4. No 1. P. 76 - 80