УДК 330.42

Модель эндогенного роста капиталовооруженности фирм

А.В.Леонидов[1,2], Е.Е.Серебрянникова[1,2]

[1] Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН
[2] Московский физико-технический институт (государственный университет)

1 Введение

Исследование эндогенного экономического роста – одна из областей экономической теории, в которой находят применение методы теоретической физики. А именно, с помощью уравнений математической физики описывается эволюция распределения фирм по уровням эффективности, воплощая идею Йозефа Шумпетера о возможности двунаправленного роста эффективности фирм: процессов инноваций и имитаций. Подробный обзор данной области представлен в [1].

В ряде работ [2–5] эволюция распределения фирм была включена в равновесные модели экономического роста, так что эндогенный рост экономики в этих моделях результат решения агентами некоторой оптимизационной задачи. В данных моделях под эффективностью понимается единственный фактор – общая факторная производительность (ОФП).

В работе [1] предложена к дальнейшему исследованию модель центрального планирования с двумя показателями эффективности фирмы: уровнем капиталовооруженности (объемом капитала на одного работника) и ОФП. Задача такого рода с одним показателем эффективности - ОФП - была рассмотрена ранее в работе [4]. В данной работе рассматривается также задача с одним показателем эффективности, но, в отличие от [4], этот показатель - капиталовооруженность фирмы.

2 Постановка задачи

Следуя модели [1], будем предполагать, что

- количество потребителей постоянно и совпадает с количеством работников
- все потребители одинаковы (равномерное распределение потребления), поэтому задача центрального планировщика - максимизация благосостояния репрезентативного потребителя
- каждая фирма нанимает одного работника (поэтому капиталовооруженность - это, фактически, запас капитала)
- величина выпуска фирмы зависит только от уровня капиталовооруженности

Задача центрального планировщика имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
W &= \int_t^T e^{-\rho(\tau-t)}U(c(\tau))d\tau \to \max_{s_n(\cdot),n\in\mathbb{N}}, &(1)\\
c(\tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\tau)f_n(\tau) - \frac{dk}{d\tau}, &(2)\\
\frac{df_n(\tau)}{d\tau} &= -\phi\left(F_n,s_n\right)f_n + \phi(F_{n-1},s_{n-1})f_{n-1},\ n\in\mathbb{N}, &(3)\\
f_n(0) &= \text{fix},\ n\in\mathbb{N}, &(4)
\end{aligned}
$$

где

- $n\in\mathbb{N}$ - уровни капиталовооруженности
- $f_n(\tau)$ - доля фирм, находящихся на уровне капиталовооруженности n, $F_n(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau)$- доля фирм, находящихся на уровне капиталовооруженности не выше n
- $g_n(\tau)$ - выпуск фирмы, находящейся на уровне капиталоoруженности n
- $c(\tau)$ - потребление репрезентативного потребителя, W - благосостояние репрезентативного потребителя
- k - совокупный запас капитала в экономике
- s_n - управление, определяющее издержки перехода на следующий уровень капиталовооруженности
- $\phi(F_n,s_n)$ - некоторая заданная функция. Как отмечается в [1], в простейшем случае эта функция убывает по F_n
- $U(c)$ - мгновенная функция полезности
- ρ - норма дисконтирования
- соотношение (2) - уравнение баланса в экономике
- (3) - характеристика эволюции распределения

Для того чтобы переходы происходили только в направлении увеличения капиталовооруженности необходимо ввести дополнительное ограничение на допустимое множество управлений:

$$\phi(F_n,s_n)\geq 0,\ n\in\mathbb{N}. \qquad (5)$$

Учитывая что $k(t)=\sum_{n=1}^{\infty} nf_n(t)$, динамика капитала и уравнение баланса преобразуются, соответственно, к следующему виду:

$$
\begin{aligned}
\frac{dk}{d\tau} &= \sum_{n=1}^{\infty}\phi(F_n,s_n)f_n &(6)\\
c(t) &= \sum_{n=1}^{\infty}(g_n-\phi(F_n,s_n))f_n &(7)
\end{aligned}
$$

Замечание. Исходя из соотношения (6), величине $\phi(F_n,s_n)f_n$ можно придать смысл инвестиций фирмы уровня n.

3 Решение

Для решения этой задачи будем использовать принцип максимума. Гамильтониан имеет следующий вид:

$$\mathcal{H} = e^{-\rho(\tau-t)}U(c(\tau)) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(-\phi(F_n, s_n)f_n + \phi(F_{n-1}, s_{n-1})f_{n-1}) \tag{8}$$

Динамика фазовых переменных $\mathbf{f} = (f_n,\ n \in \mathbb{N})$ и двойственных переменных $\lambda = (\lambda_n,\ n \in \mathbb{N})$ выглядит следующим образом:

$$\dot{f_n} = \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{f}, \lambda, \hat{\mathbf{s}})}{\partial \lambda_n} \tag{9}$$

$$\dot{\lambda_n} = -\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{f}, \lambda, \hat{\mathbf{s}})}{\partial f_n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{f}, \lambda, \mathbf{s})}{\partial s_n}\bigg|_{s_n=\hat{s}_n} \frac{\partial \hat{s}_n}{\partial f_n} \tag{10}$$

$$\lambda_n(T) = 0,\ n \in \mathcal{N}. \tag{11}$$

3.1 Введение замены

Управление s_n входит в задачу (в гамильтониан и ограничения) только как аргумент функции $\phi(F_n, s_n)$. Если функция $\phi(F_n, s_n)$ монотонна по s_n при фиксированном значении F_n, то при фиксированном F_n определена обратная функция $\phi^{-1}(u_n|F_n)$. Исходя из этого, не имеет значения, будем мы решать задачу максимизации гамильтониана путем выбора оптимальных значений $s_n, n \in \mathbb{N}$ или $u_n = \phi(F_n, s_n), n \in \mathbb{N}$, поскольку задача максимизации гамильтониана решается при фиксированных значениях фазовых переменных.

Обозначим (I) задачу (1) - (7), а (I') - следующую задачу с заменой $\phi(s_n, F_n)$ на u_n:

$$W = \int_t^T e^{-\rho(\tau-t)}U(c(\tau))d\tau \to \max_{u_n(\cdot), n\in\mathbb{N}}, \tag{12}$$

$$c(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}(g_n(\tau) - u_n(\tau))f_n(\tau) \tag{13}$$

$$\frac{df_n(\tau)}{d\tau} = -u_n f_n + u_{n-1}f_{n-1},\ n \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

$$f_n(0) = \text{fix},\ n \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

$$u_n \geq 0. \tag{16}$$

Утверждение 1. Пусть функция $\phi(F_n, s_n)$ монотонна по s_n и $\forall F_n, u \in [0, \infty)\ \exists s_n : \phi(s_n, F_n) = u$. Тогда если в задаче (I') с управлением u_n максимум гамильтониана достигается при $u_n = \tilde{u}_n$, то максимум в задаче (I) (с заменой управления u_n на $\phi(F_n, s_n)$) достигается при $s_n = \phi^{-1}(\tilde{u}_n|F_n)$.

$\triangleright$

1) Предположим, что при максимизации гамильтониана $\mathcal{H}(\mathbf{f}, \lambda, \mathbf{u})$ задачи (I') по $\mathbf{u}$ оптимум достигается при $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$.

   Рассмотрим задачу, в которой u_n заменено на $\phi(F_n, s_n)$. Обозначим гамильтониан этой задачи $\mathcal{H}_\phi$. Пусть максимум этого гамильтониана достигается при $\mathbf{s} = \hat{\mathbf{s}}$.

   Допустим, $\phi(F_n, \hat{s}_n) \neq \tilde{u}_n$, тогда

   $$\mathcal{H}(\mathbf{f}, \lambda, \phi(F_n, \hat{s}_n)) = \mathcal{H}_\phi(\mathbf{f}, \lambda, \hat{\mathbf{s}}) > \mathcal{H}_\phi(\mathbf{f}, \lambda, \phi^{-1}(\tilde{u}_n|F_n)) = \mathcal{H}(\mathbf{f}, \lambda, \tilde{\mathbf{u}}),$$

   что противоречит оптимальности $\tilde{\mathbf{u}}$ в исходной задаче.

2) Покажем, что такая замена также не меняет дифференциальные уравнения на фазовые и двойственные переменные.

Для фазовых переменных утверждение следует из следующего соотношения:

$$\dot{f}_n = \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{f}, \lambda, \tilde{\mathbf{u}})}{\partial \lambda_n} = \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{f}, \lambda, \phi(F_n, \hat{s}_n))}{\partial \lambda_n} = \frac{\partial \mathcal{H}_\phi(\mathbf{f}, \lambda, \hat{\mathbf{s}})}{\partial \lambda_n}. \tag{17}$$

Диффренциальные уравнения для двойственных переменных в задаче (I') имеют вид:

$$\dot{\lambda}_n = -\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{f}, \lambda, \tilde{\mathbf{u}})}{\partial f_n} \tag{18}$$

В задаче с заменой получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_n &= -\frac{\partial \mathcal{H}_\phi(\mathbf{f}, \lambda, \hat{\mathbf{s}})}{\partial f_n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{H}_\phi(\mathbf{f}, \lambda, \mathbf{s})}{\partial s_n}\bigg|_{\hat{s}_n} \frac{\partial \hat{s}_n}{\partial f_n} \qquad (19)\\
&= -\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{f}, \lambda, \mathbf{u})}{\partial f_n}\bigg|_{\mathbf{u}=\tilde{\mathbf{u}}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{f}, \lambda, \mathbf{u})}{\partial u_n}\bigg|_{\mathbf{u}=\tilde{\mathbf{u}}} \frac{\partial \phi(F_n, s_n)}{\partial f_n}\bigg|_{\mathbf{s}=\hat{\mathbf{s}}} - \\
&- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{f}, \lambda, \mathbf{u})}{\partial u_n}\bigg|_{\mathbf{u}=\tilde{\mathbf{u}}} \frac{\partial \phi(F_n, s_n)}{\partial s_n}\bigg|_{\mathbf{s}=\hat{\mathbf{s}}} \frac{\partial \hat{s}_n}{\partial f_n}
\end{aligned}$$

Заметим, что если решение внутреннее, то $\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{f},\lambda,\mathbf{u})}{\mathbf{u}}\Big|_{\mathbf{u}=\tilde{u}} = 0$, т.е. соотношения (18) и (19) совпадают. Если же решение находится на границе $\phi(F_n, s_n) = 0$ или $u_n = 0$, то $\frac{d}{df_n}\phi(F_n, s_n) = \frac{\partial \phi}{\partial f_n} + \frac{\partial \phi}{\partial s_n}\frac{\partial s_n}{\partial f_n} = 0$, то есть уравнения также совпадают.

$\triangleleft$

3.2 Решение задачи с заменой

Гамильтониан задачи (I') и дифференциальные уравнения на фазовые и двойственные переменные приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= e^{-\rho(\tau-t)} U(c(\mathbf{f}, \mathbf{u})) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(-u_n f_n + u_{n-1} f_{n-1}) && (20)\\
\dot{f}_n &= -u_n f_n + u_{n-1} f_{n-1} && (21)\\
\dot{\lambda}_n &= -(e^{-\rho(\tau-t)} U'(c(\mathbf{f}, \mathbf{u}))(g_n - u_n) + u_n(\lambda_{n+1} - \lambda_n)) && (22)\\
\lambda_n(T) &= 0 && (23)\\
u_n &\geq 0,\ n \in \mathbb{N} && (24)
\end{aligned}$$

Отметим, что явного учета ограничения $c(\tau) \geq 0$ можно избежать путем ввода ограничения на допустимый вид функции полезности $\lim_{c\to 0} U(c) = -\infty$ (например, $U(c) = \ln(c)$).

Оптимальное управление доставляет максимум гамильтониану, поэтому

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_n} = e^{-\rho(\tau-t)} U'(c(\mathbf{f}, \mathbf{u}))(-f_n) + (\lambda_{n+1} - \lambda_n) f_n \leq 0, \tag{25}$$

причем при $u_n > 0$ последнее неравенство выполнено как равенство.

- Если $f_n = 0$, u_n может быть любым. Без ограничения общности можно считать $u_n = 0$ в этом случае.

- Пусть $f_n > 0$. Тогда $\lambda_{n+1} - \lambda_n \le e^{-\rho(\tau-t)}U'(c(\mathbf{f},\mathbf{u}))$, со строгим равенством в случае $u_n > 0$.

- Заметим, что $e^{-\rho(\tau-t)}U'(c(\mathbf{f},\mathbf{u})) > 0$, а в момент времени T $\lambda_n(T) = 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Значит, в момент времени T $u_n(T) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

- Обозначим $\Psi(\tau,\mathbf{f},\mathbf{u}) = e^{-\rho(\tau-t)}U'(c(\mathbf{f},\mathbf{u}))$. Заметим, что $\forall\ u_n \ge 0$ $\lambda_{n+1} - \lambda_n \le \Psi(\tau,\mathbf{f},\mathbf{u})$. Поэтому

$$\max_{m\in\mathbb{N}:f_m(\tau)>0}(\lambda_{m+1}(\tau) - \lambda_m(\tau)) \le \Psi(\tau,\mathbf{f},\mathbf{u}), \tag{26}$$

  причем, если $\exists m \in \mathbb{N} : f_m > 0$ и $u_m > 0$, то (26) выполнено как равенство.

- Заметим, что как при $u_n = 0$, так и при $u_n > 0$

$$\dot{\lambda}_n = -g_n\Psi(\tau,\mathbf{f},\mathbf{u}).$$

  Если $\exists m \in \mathbb{N} : f_m > 0$ и $u_m > 0$, то

$$\dot{\lambda}_n = -g_n \max_{m\in\mathbb{N}:f_m>0}(\lambda_{m+1} - \lambda_m),$$

  а оптимальное значение $c(\mathbf{f},\mathbf{u})$ определяется из соотношения

$$U'(c(\mathbf{f},\mathbf{u})) = e^{\rho(\tau-t)} \max_{m\in\mathbb{N}:f_m>0}(\lambda_{m+1} - \lambda_m). \tag{27}$$

  Иначе, если $\forall m \in \mathbb{N} : f_m > 0 \to u_m = 0$,

$$c(\tau) = c_{\max}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n f_n(\tau). \tag{28}$$

  Вектор управлений (для $n : f_n > 0$) должен удовлетворять следующим условиям:

  – если $n \in \operatorname{Arg}\max_{m\in\mathbb{N}:f_m>0}(\lambda_{m+1} - \lambda_m)$, то $u_n \ge 0$, иначе $u_n = 0$
  – $\mathbf{u}:\ \sum_{n=1}^{\infty}(g_n - u_n)f_n = c(\cdot)$

3.3 Случай убывающей отдачи от масштаба

Определение. Будем называть дискретную функцию g_n $(n \in \mathbb{N})$ вогнутой по n, если $\Delta_n = g_{n+1} - g_n$ убывает с ростом n.

Если g_n вогнута по n, то производственная функция характеризуется убывающей отдачей от масштаба.

Покажем, что если функция g_n вогнута по n, то $\max_{m\in\mathbb{N}:f_m>0}(\lambda_{m+1} - \lambda_m)$ достигается при единственном значении m.

Введем обозначения:

$$\Lambda(\tau) = \max_{m\in\mathbb{N}:f_m(\tau)>0}(\lambda_{m+1}(\tau) - \lambda_m(\tau)), \tag{29}$$
$$\Lambda_{mn}(\tau) = (\lambda_{m+1}(\tau) - \lambda_m(\tau)) - (\lambda_{n+1}(\tau) - \lambda_n(\tau)), \tag{30}$$

далее для каткости не будем указывать аргумент τ.

Утверждение 2. Если фнукция g_n вогнута по n и $m < n$, то $\Lambda_{mn} > 0$, $\forall \tau < T$

$\triangleright$

$$\dot{\Lambda}_{mn} = \dot{\lambda}_{m+1} - \dot{\lambda}_m - (\dot{\lambda}_{n+1} - \dot{\lambda}_n) = (-g_{m+1} + g_m + g_{n+1} - g_n)\Psi \tag{31}$$

Заметим, что $\Psi > 0$, а $(g_{n+1} - g_{m+1}) - (g_n - g_m) < 0$ в силу предположения о вогнутости функции g_n, поэтому $\dot{\Lambda}_{mn} < 0$. При этом $\Lambda_{mn}(T) = 0$. Значит, $\Lambda_{mn}(\tau) > 0$ при $m < n$ и $\tau < T$. $\triangleleft$

Из Утверждения 2 следует, что

$$\Lambda(\tau) = \lambda_{n_{\min}+1} - \lambda_{n_{\min}},$$

где $n_{\min} = \min\{n \in \mathbb{N} : f_n > 0\}$. И, кроме того, не существует другого уровня $k > n_{\min}$, такого что $\Lambda = \lambda_{k+1} - \lambda_k$, т.е. для любого $k > n_{\min}$ $\lambda_{k+1} - \lambda_k < \Psi$, и, следовательно, $u_k = 0$.

То есть отличным от нуля может быть только $u_{n_{\min}}$:

$$u_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq n_{\min} \text{ или } \Lambda(\tau) < e^{-\rho(\tau-t)}U'(c_{\max}(\tau)); \\ \frac{\sum_{m=1}^{\infty} g_m f_m - U'^{-1}(e^{\rho(\tau-t)}\Lambda)}{f_n}, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{32}$$

Заметим, что набор управлений ($u_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$) удовлетворяет условиям первого порядка (25):

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_n} = -f_n\Psi + (\lambda_{n+1} - \lambda_n)f_n \begin{cases} = 0, \text{если } f_n = 0 \\ \leq 0, \text{если } f_n > 0, \end{cases} \tag{33}$$

и поэтому является одним из возможных решений при любых значениях остальных параметров задачи.

Таким образом, в задаче центрального планировщика в случае убывающей отдачи от масштаба оптимальным может быть только один из двух сценариев:

- инвестировать в фирмы, находящиеся на самом низком уровне капиталовооруженности;
- не инвестировать в рост капиталовооруженности.

3.4 Численные результаты

Пусть функция полезности логарифмическая: $U(c) = \ln(c)$, - и, кроме того, исходно фирмы равномерно распределены по первым пяти уровням (Рис. 1). Предположим также, что производственная функция g_n имеет вид, представленный на Рис. 2.

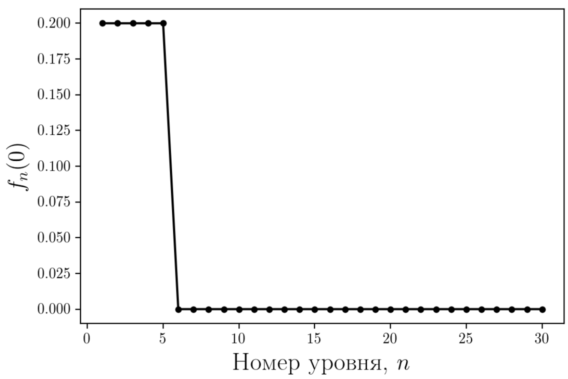

Рис. 1: Исходное распределение фирм по уровням капиталовооруженности

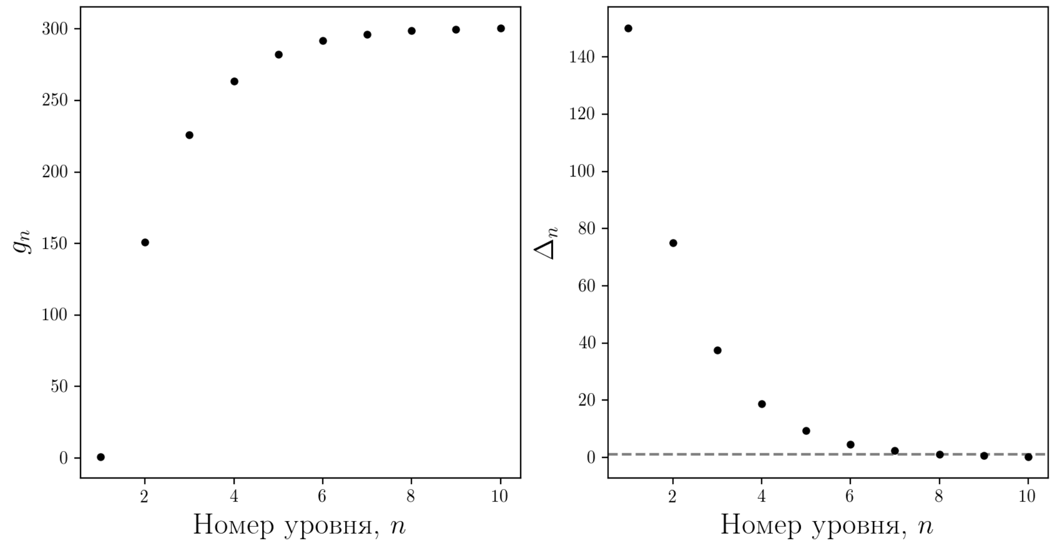

Рис. 2: Зависимость объема выпуска фирмы от уровня капиталовооруженности (g_n) и прироста выпуска при переходе на следующий уровень ($\Delta_n = g_{n+1} - g_n$). Пунктирная горизонтальная линия проведена на уровне единицы

Можно ожидать, что переход на следующий уровень выгодно осуществлять только при достаточно большом приросте выпуска, возникающем за счет этого перехода, то есть сдвиг распределения должен наблюдаться до тех пор, пока $g_n - g_{n-1}$ достаточно велико. Поскольку прирост капитала линейно зависит от инвестиций, а производственная функция вогнута, должен существовать предельный уровень ($n_{\max}$), инвестиции в переход на который будут окупаться дополнительным выпуском. Поэтому величина прироста выпуска при переходе на этот уровень должна быть больше единицы ($\Delta_{n_{\max}-1} > 1$). Исходя из Рис. 2, последний уровень, на который можно ожидать переход - уровень 8. Данная гипотеза подтверждается численным решением, иллюстрацией которого является эволюция доли фирм на разных уровнях капиталовооруженности, изображенная на Рис. 3.

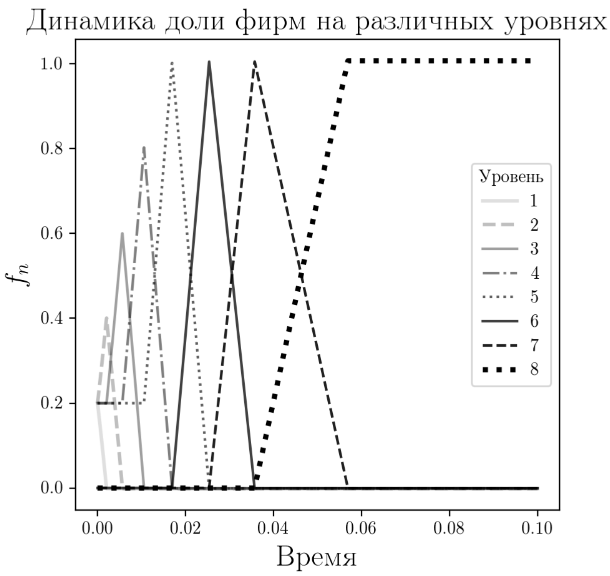

Рис. 3: Эволюция доли фирм, находящихся на различных уровнях капиталовооруженности

Литература

1. *Полтерович, В. М.*Теория эндогенного экономического роста и уравнения математической физики // Журнал Новой Экономической Ассоциации. 2017. V. 2, N 34. P.193–201.

2. *Acemoglu, D., Cao, D.* Innovation by entrants and incumbents // Journal of Economic Theory. 2015. V. 157. P.255–294.

3. *König, M. D., Lorenz, J., Zilibotti, F.* Innovation vs. imitation and the evolution of productivity distributions // Theoretical Economics. 2016. V. 11. P. 1053–1102.

4. *Lucas, R. E., Moll, B.* Knowledge Growth and the Allocation of Time // Journal of Political Economy. 2014 V. 122, N 1. P. 1–51.

5. *Luttmer, E. G. J.* Eventually, Noise and Imitation Implies Balanced Growth // Federal Reserve Bank of Minneapolis Working Paper 699. 2012. P.0–29.