

# Применение нечетких асимметричных GARCH-моделей к прогнозированию волатильности российского фондового рынка

А.Е. Лепский, А.А. Суевалов

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

**Аннотация.** В работе представлены результаты прогнозирования волатильности индексов российского фондового рынка с помощью существующих и разработанных авторами нечетких асимметричных GARCH-моделей. В этих моделях рассматриваются различные переключаемые функции, учитывающие положительные и отрицательные шоки, которые строятся с помощью инструментария нечетких чисел. Кроме того, в некоторых моделях использовались переключаемые функции, учитывающие экспертную макроэкономическую информацию. Показано, что нечеткие асимметричные GARCH-модели обеспечивают большую точность прогнозирования волатильности, чем аналогичные неразмытые модели.

**Ключевые слова:** волатильность, асимметричная GARCH-модель, нечеткие числа.

## Application of Fuzzy Asymmetric GARCH-Models to Forecasting of Volatility of Russian Stock Market

A. Lepskiy, A. Suevalov

National Research University – Higher School of Economics, Moscow, Russia

**Abstract.** This paper presents the results of volatility forecasting for indices of the Russian stock market using existing and developed by the authors fuzzy asymmetric GARCH-models. These models consider various switching functions which are taking into account the positive and negative shocks and are built using the tools of fuzzy numbers. Furthermore, in some models there are used switching functions that consider expert macroeconomic information. It was shown that fuzzy asymmetric GARCH-models provide a more accurate prediction of volatility than similar crisp models.

**Keywords:** volatility, asymmetric GARCH-model, fuzzy numbers.

# 1 Введение

Волатильность является одним из ключевых параметров риска в теории финансов. Поэтому проблема прогнозирования волатильности фондового рынка является одной из центральных задач финансового анализа [Wiley 2005]. От точности решения этой проблемы зависит успешность управления финансовыми рисками, определения цен опционов и т.д.

В рамках гипотезы эффективного рынка для прогнозирования волатильности широко используются модели авторегрессионной условной гетероскедастичности – так называемые ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity [Engle 1982]) и GARCH (Generalized ARCH [Bollerslev 1986]) модели. Эти модели имеют многочисленные модификации. Особенно популярны асимметричные GARCH-модели, которые по-разному учитывают отрицательные и положительные шоки, что дает более точный прогноз на асимметричных данных. Таковы, например, Threshold GARCH – TGARCH [Zakoian 1994], GJR-GARCH [Glosten et al. 1993], Volatility Switching GARCH – VSGARCH [Fornari & Mele 1996] (см. подробности в [Franke et al. 2015]). Все эти модели зависят от ряда параметров, которые могут быть найдены, например, методом максимального правдоподобия. Но бывает и так, что какие-то параметры модели являются нечеткими числами [Klir & Yuan 1995]. Такие модели называют нечеткими. В частности, существует ряд нечетких моделей авторегрессионной условной гетероскедастичности. Нечеткие модели являются более гибкими, они могут быть лучше адаптированы к реальным данным. Кроме того, сами реальные данные (например, данные фондовой биржи) могут быть описаны с помощью нечетких чисел.

Помимо этого, в нечетких моделях может быть учтена не только статистическая информация, как в классическом случае, но и некоторая экспертная информация. Так одной из интересных с этой точки зрения моделей на наш взгляд является нечеткая асимметричная GARCH-модель, предложенная Хангом в [Hung 2009]. В этой модели, как в любой асимметричной модели, по-разному учитываются отрицательные и положительные шоки с помощью некоторой переключательной функции – характеристической функции множества «почти» положительных чисел, которая «переключает» модель с одних параметров на другие в зависимости от величины и знака прошлых шоков относительно некоторого порога. В модели работы [Hung 2009] этот порог определяется в соответствии с правилами нечеткого вывода, которые формулируют эксперты. В качестве правил в [Hung 2009] рассматривались экспертные утверждения, связывающие изменения индекса NASDAQ и изменением индексов локальных фондовых рынков в предыдущий момент времени с прогно-

стическим изменением локальных индексов. Примерами таких правил являются следующие: {если индекс NASDAQ падает, то вероятность падения локального индекса возрастает}; {если индекс NASDAQ растет, то вероятность роста локального индекса возрастает} и т.д. Входящие в эти правила вывода величины «индекс NASDAQ» или «локальный индекс» описываются с помощью так называемых лингвистических переменных [Klir & Yuan 1995], а их поведение «падает», «возрастает» и пр. – с помощью нечетких множеств, которые задаются параметрическими функциями принадлежности. Сами правила вывода представляют собой нечеткие конструкции типа IF-THEN. Настройка параметров функций принадлежности осуществляется путем нахождения их значений, минимизирующих отклонение исторической волатильности от исторической ожидаемой волатильности. Интересно, что эта модель позволяет исследовать и обратную задачу – установить, как связана макроэкономическая информация, представленная в экспертных суждениях, с волатильностью. Модель Ханга была апробирована на данных азиатских фондовых рынков, где показала свою эффективность. В то же время точность предсказаний существенно отличалась на разных рынках.

Данное исследование преследовало несколько целей:

- 1) апробирование предложенной в [Hung 2009] методики прогнозирования волатильности на данных российского фондового рынка;
- 2) разработатка и исследование различных модификаций нечетких асимметричных GARCH-моделей;
- 3) сравнительный анализ неразмытых и нечетких асимметричных GARCH-моделей;
- 4) исследование влияния некоторой макроэкономической информации на волатильность.

Оставшаяся часть работы имеет следующую структуру. В разделе 2 описаны неразмытые и нечеткие асимметричные GARCH-модели. В разделе 3 приведены описания других нечетких асимметричных GARCH-моделей, введенных авторами: а) модели, в которой переключательная функция является функцией принадлежности s-типа; б) модели, в которой переключательная функция является характеристической функцией истинности сравнения нечеткого числа-гистограммы, построенной по предыдущим значениям шоков, и нечеткого порога; в) модели, в которой переключательная функция представляет собой индекс парного сравнения двух нечетких чисел. В этих моделях уже не принимается во вни-

мание экспертная макроэкономическая информация, но полнее учитываются статистические данные. В разделе 4 описана методика определения параметров нечетких асимметричных моделей. В разделе 5 приведены основные результаты моделирования. А в разделе 6 сделаны некоторые выводы из исследования.

## 2 Неразмытые и нечеткие асимметричные GARCH-модели

### 2.1 Классическая GARCH-модель

Рассмотрим простую GARCH(p,q)-модель [Bollerslev 1986], которая задается следующим образом:

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t) + c, \\ u(t) &= \sqrt{\sigma(t)}\varepsilon(t), \\ \sigma^2(t) &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u^2(t-i) + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma^2(t-j), \end{aligned}$$

где  $y(t)$  – случайная величина, полученная, например, из фондовой биржи,  $\varepsilon(t)$  – процесс белого шума с нулевым средним и единичной дисперсией,  $\sigma(t)$  – условная дисперсия  $\varepsilon(t)$ , а  $\alpha_0, \alpha_i, \beta_j$  и  $c$  – неизвестные параметры, которые нужно оценить. Предполагается, что:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &> 0, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad q > 0, \\ \beta_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad p > 0, \\ \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j &< 1. \end{aligned}$$

Как видно из этого определения GARCH(p,q)-модели, текущая волатильность зависит от трех составляющих: от константы, которая является произведением параметра  $\gamma$  (такого, что для GARCH(1,1)-модели:  $\gamma + \alpha + \beta = 1$ ) и долговременной дисперсии  $V_L$ , от случайных величин – "новостей" о волатильности и от прошлых условных волатильностей. Однако, эта модель предполагает одинаковую реакцию на положительные и отрицательные шоки. Вместе с тем доказано [Engle & Ng 1993], что рынок реагирует на положительные и отрицательные шоки по-разному. Поэтому в дальнейшем получили распространение так называемые асиммет-

ричные GARCH-модели, которые по-разному учитывают положительные и отрицательные шоки.

## 2.2 Асимметричные GARCH-модели

Две пороговые асимметричные модели были независимо предложены в 1991 году Закояном [Zakoian 1994] – обозначают TGARCH, а в 1993 году Глостеном, Джаганнатаном и Ранклом [Glosten et al. 1993] – обозначают GJR-GARCH, соответственно. Они задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t) + c, \\ u(t) &= \sqrt{\sigma(t)}\varepsilon(t), \\ \sigma^d(t) &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i^{(1)} u^d(t-i) I\{u(t-1) > 0\} + \\ &+ \sum_{k=1}^q \alpha_i^{(2)} u^d(t-k) (1 - I\{u(t-1) > 0\}) + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma^d(t-j). \end{aligned}$$

где  $I(\cdot)$  - переключательная функция-индикатор, остальные обозначения такие же, как и в пункте 2.1. Отличие этих двух моделей только в степени  $d$ : для TGARCH-модели [Zakoian 1994]  $d = 1$ , для GJR-GARCH-модели [Glosten et al. 1993]  $d = 2$ .

Еще одним примером асимметричной GARCH-модели является модель, предложенная в [Fornari & Mele 1996] – Volatility Switching GARCH (VSGARCH). Она задается следующим образом:

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t) + [I\{u(t-1) > 0\}c^{(1)} + (1 - I\{u(t-1) > 0\})c^{(2)}], \\ u(t) &= \sqrt{\sigma(t)}\varepsilon(t), \\ \sigma^2(t) &= I\{u(t-1) > 0\} \left[ \alpha_0^{(1)} + \sum_{i=1}^q \alpha_i^{(1)} u^2(t-i) + \sum_{j=1}^p \beta_j^{(1)} \sigma^2(t-j) \right] + \\ &+ (1 - I\{u(t-1) > 0\}) \left[ \alpha_0^{(2)} + \sum_{i=1}^q \alpha_i^{(2)} u^2(t-i) + \sum_{j=1}^p \beta_j^{(2)} \sigma^2(t-j) \right]. \end{aligned}$$

Эта модель похожа на вышеописанные модели за исключением того, что переключательная функция-индикатор действует на всю формулу модели.

## 2.3 Нечеткие асимметричные GARCH-модели

Одна из интересных на наш взгляд нечетких асимметричных моделей была предложена в [Hung 2009]:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= u(t) + [I(t)c^{(1)} + (1 - I(t))c^{(2)}], \\
 u(t) &= \sqrt{\sigma(t)}\varepsilon(t), \\
 \sigma^2(t) &= I(t) \left[ \alpha_0^{(1)} + \sum_{i=1}^q \alpha_i^{(1)} u^2(t-i) + \sum_{j=1}^p \beta_j^{(1)} \sigma^2(t-j) \right] + \\
 &+ (1 - I(t)) \left[ \alpha_0^{(2)} + \sum_{i=1}^q \alpha_i^{(2)} u^2(t-i) + \sum_{j=1}^p \beta_j^{(2)} \sigma^2(t-j) \right], \quad (1)
 \end{aligned}$$

где  $I(t)$  – это переключательная функция такая, что:

$$I(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } y(t-d) \geq r(t), \\ 0, & \text{если } y(t-d) < r(t), \end{cases}$$

где  $d$  – временной лаг,  $r(t)$  – пороговое значение. Это пороговое значение рассчитывалось в [Hung 2009] с помощью нечеткой модели, в которой использовался инструментарий теории нечетких чисел.

Нечеткая GARCH-модель Ханга состоит из 4 компонент: фазсификатора, нечеткой системы правил, механизма нечеткого вывода, дефазсификатора. Она получает на вход данные (например, данные фондовой биржи), которые переводятся в нечеткий вид (фазсифицируются). После этого механизм нечеткого вывода использует систему правил, чтобы получить некие нечеткие выходные данные. Далее дефазсификатор отображает эти данные в пороговое значение  $r(t)$ .

Нечеткие правила, использующиеся в этой системе, строятся по экспертной информации на основе общего макроэкономического анализа рынка. В нашей работе были использованы два вида правил: простые и сложные. Простые правила – это правила, учитывающие только один инструмент, например: {если индекс ММВБ/РТС падает, то вероятность его падения возрастает}. Сложные правила – это правила, которые используют несколько инструментов, например: {если индекс ММВБ/РТС падает, курс доллара растет, то вероятность падения индекса ММВБ/РТС возрастает}.

### 3 Модификации асимметричной нечеткой GARCH-модели

#### 3.1 Асимметричная GARCH-модель с переключательной функцией принадлежности s-типа

Определим GARCH-модель с переключательной функцией принадлежности s-типа, как (1), а в качестве характеристической функции возьмем следующую:

$$I(t) = \begin{cases} 1, & t > a + \Delta, \\ \frac{t - (a - \Delta)}{2\Delta}, & a - \Delta \leq t \leq a + \Delta, \\ 0, & t < a - \Delta, \end{cases}$$

где  $a, \Delta$  – параметры, которые оцениваются вместе с коэффициентами модели методом максимального правдоподобия. Пример такой функции приведен на рис. 1.

Отличие данной модели от модели Ханга в том, что здесь характеристическая функция может принимать все значения от 0 до 1, а в модели Ханга – только 0 и 1. Это позволяет придавать некоторые веса для положительных и отрицательных шоков, а не по-разному реагировать на них.

#### 3.2 Модель с характеристической функцией сравнения нечеткого числа-гистограммы и нечеткого порога

Для данной модели характеристическая функция определяется как:

$$I(t) = \begin{cases} 1, & r^d(t) \succ h, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $r^d(t)$  – нечеткое число-гистограмма, построенное по  $d$  последним значениям  $y(t-1), \dots, y(t-d)$ ,  $h$  – нечеткий порог,  $\succ$  – некоторая операция сравнения нечетких чисел [Wang et al. 2009].

В данной работе в качестве нечеткого порога использовалось симметричное треугольное нечеткое число [Wang et al. 2009], которое задается с помощью двух параметров: среднего значения и размаха. Эти параметры

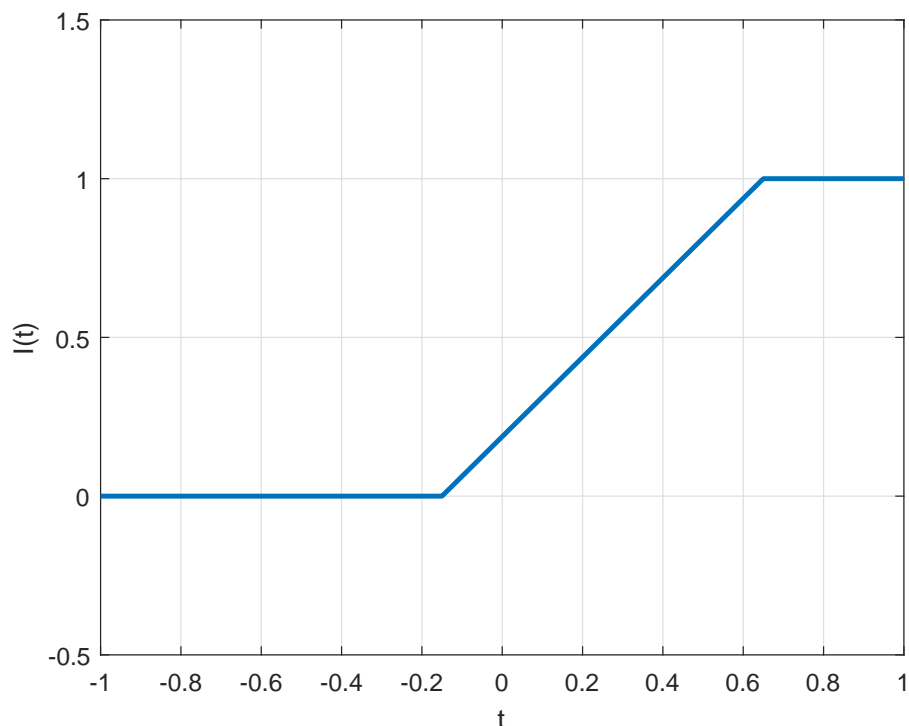


Рис. 1: Характеристическая функция s-типа ( $a = 0.25, \Delta = 0.4$ )

находятся вместе с коэффициентами модели. Сравнение нечеткого порога и нечеткого числа-гистограммы производилось по среднему значению носителя нечеткого числа – на рис. 2 приведен пример такого сравнения.

### 3.3 Модель с переключательной функцией индекса парного сравнения нечетких чисел

В этой модели в качестве переключательной функции будем использовать некоторый индекс парного сравнения нечетких чисел  $R$  [Wang et al. 2009].

$$I(t) = R(r^d(t), h),$$

где  $r^d(t)$  и  $h$  – нечеткое число-гистограмма и нечеткий порог, определенные в предыдущем пункте. В качестве индекса парного сравнения ниже будем использовать популярный индекс Бааса-Квакернаака [Baas & Kwakernaak 1977]:



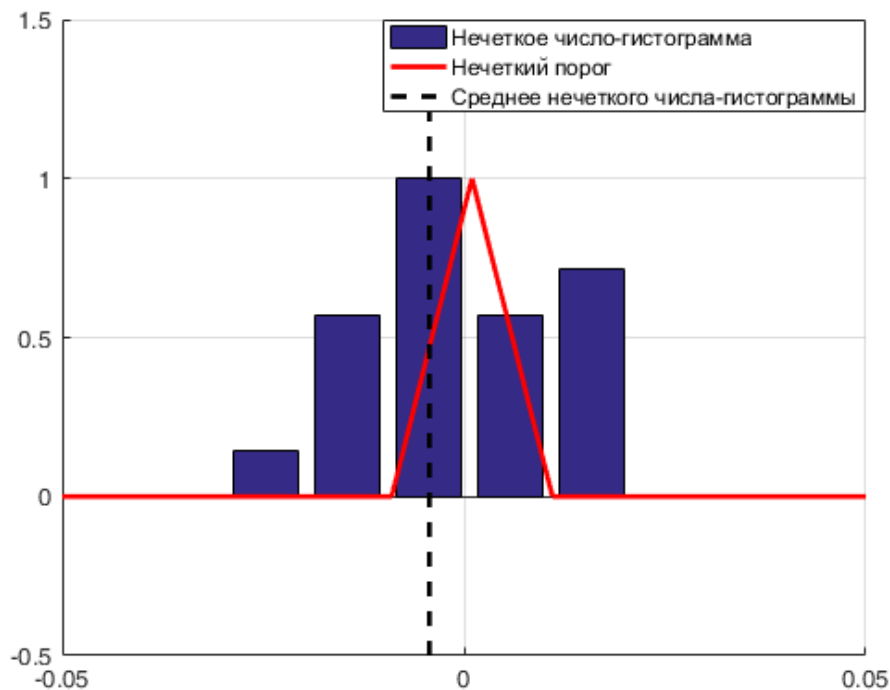


Рис. 2: Сравнение нечеткого числа-гистограммы и нечеткого порога.

$$R(r^d(t), h) = \sup_{i \geq j} \min\{\mu_{r^d(t)}(i), \mu_h(j)\},$$

где  $\mu_{r^d(t)}$  и  $\mu_h$  — функции принадлежности нечеткого числа-гистограммы и нечеткого порога, соответственно.

## 4 Определение параметров асимметричных моделей

В данной работе исследовалась волатильность индексов ММВБ и РТС. Правила для прогнозирования определялись отдельно для каждого индекса. Формально правила были одинаковыми — отличались их коэффициенты в нечеткой системе. Процесс вычисления коэффициентов выглядит следующим образом: берется три правила, имеющих одинаковое условие, например, {если курс доллара растет, то индекс ММВБ/РТС упадет/не изменится/вырастет}, после этого для каждого из этих трех правил находят коэффициенты, при которых функция правдоподобия

принимает наибольшее значение. Далее этот процесс повторяется для правил с другими условиями. Заметим, что сумма коэффициентов правил не обязательно равна 1. В таблицах 1 и 2 представлены найденные коэффициенты.

Следующий вопрос – как совместить эти правила? Были использованы два метода: вычисление среднего у коэффициентов двух правил, вычисление суммы коэффициентов двух правил. Оказалось, что они дают одинаковые результаты.

	Индекс ММВБ упадет	Индекс ММВБ не изменится	Индекс ММВБ вырастет
Курс доллара упал	0	0.3	0.4
Курс доллара не изменился	0	0.2	0.3
Курс доллара вырос	0	0.3	0.4
Индекс ММВБ упал	0	0.3	0.4
Индекс ММВБ не изменился	0	0.2	0.3
Индекс ММВБ вырос	0	0.4	0.7

Таблица 1: Коэффициенты правил для индекса ММВБ.

	Индекс РТС упадет	Индекс РТС не изменится	Индекс РТС вырастет
Курс доллара упал	0	0	0.1
Курс доллара не изменился	0	0.1	1
Курс доллара вырос	0	0	0.1
Индекс РТС упал	0	0	0.1
Индекс РТС не изменился	1	0.6	0.3
Индекс РТС вырос	0	0	0.1

Таблица 2: Коэффициенты правил для индекса РТС.

В работе [Hung 2009] также были оценены и функции принадлежности всех входных (относительные доходности локальных индексов и индекса NASDAQ) и выходных (порогового значения) переменных. Однако, в нашей работе использовались изначально заданные функции принадлежности, представленные на рис. 3 и рис. 4. Они задавались так, чтобы их "хвосты" пересекались в некоторой окрестности нуля. Различие для

индекса ММВБ и индекса РТС объясняется тем, что доходности этих индексов имеют различный разброс. Разброс порогового значения задавался в десять раз меньшим, чем для каждого индекса. После задания правил и функций принадлежности были оценены параметры нечеткой асимметричной модели.

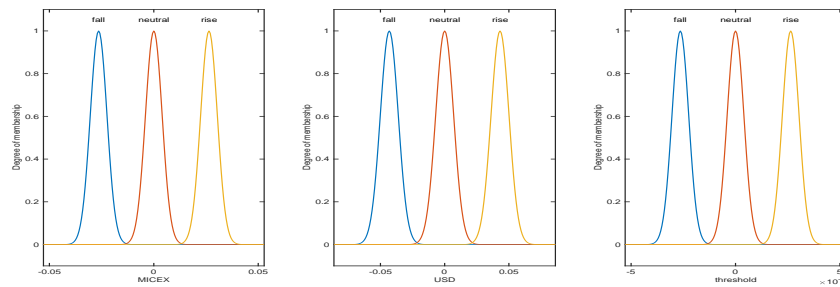


Рис. 3: Функции принадлежности для шоков индекса ММВБ, курса доллара и порогового значения.

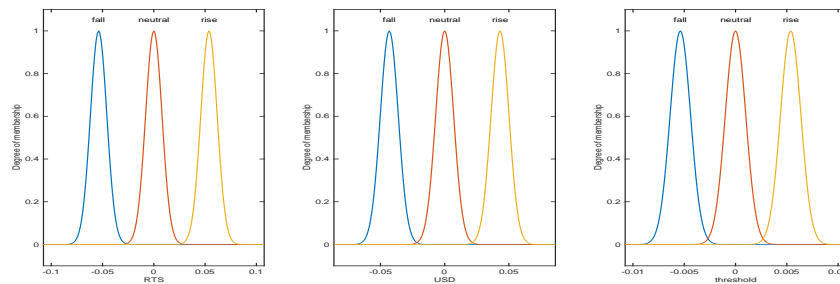


Рис. 4: Функции принадлежности для шоков индекса РТС, курса доллара и порогового значения.

Кроме этого были апробированы новые модели, которые являются модификациями GJR-GARCH модели [Glosten et al. 1993]. Их суть в том, что формула моделей задается так же как у GJR-GARCH модели, но сами модели используют переключательные функции других моделей: функцию из работы [Hung 2009], функцию s-типа, функцию сравнения нечеткого числа-гистограммы и нечеткого порога, функцию индекса парного сравнения нечетких чисел. В таблице 3 приведены оценки нечеткой асимметричной GJR-GARCH-модели Ханга для индексов ММВБ и РТС.

	ММВБ	РТС
c	8.46E-4	5.60E-4
$a_0$	4.83E-6	4.81E-6
$a_1^{(1)}$	2.07E-6	6.21E-7
$a_1^{(2)}$	0.061	0.045
b	0.919	0.955

Таблица 3: Оцененные параметры моделей.

## 5 Результаты тестирования моделей

Тестирование моделей осуществлялось на данных индексов ММВБ и РТС, курса доллара в период с 1 января 2015 года по 31 декабря 2016 года. Были сопоставлены даты для индексов и курса доллара там, где были пропуски по какому-либо инструменту. Обучение моделей проходило на 95% данных, а предсказание осуществлялось на 5 дней вперед.

Для сравнения моделей использовались три вида ошибок: среднеквадратическая MSFE, средняя абсолютная MAFE и наибольшая за период предсказания LAFE. Кроме этого были рассмотрены отношения ошибок к величине волатильности в определенный день, чтобы понять, на сколько процентов предсказанная волатильность отличалась от исторической. Эти отношения представлены на рис. 5 для индекса ММВБ и на рис. 6 для индекса РТС, где под моделью 1 подразумевается асимметричная GARCH-модель с переключательной функцией принадлежности s-типа, под моделью 2 – модель с характеристической функцией сравнения нечеткого числа-гистограммы и нечеткого порога, а под моделью 3 – модель с переключательной функцией индекса парного сравнения нечетких чисел. Все модели тестировались в форме GJR-GARCH-модели.

По этим результатам видно, что процент ошибки очень мал. Более того, предложенные модели 1 и 2 показывают результаты сравнимые с нечеткой GJR-GARCH-моделью и в большинстве дней лучшие, чем GJR-GARCH-модель для индекса РТС и индекса ММВБ, соответственно.

В таблицах 4 и 5 представлены ошибки данных моделей. Можно сделать вывод, что модели 1 и 2 (в форме GJR-GARCH-модели) показали себя лучше всего на индексах РТС и ММВБ, соответственно. Нечеткая модель показала также неплохие результаты, но, как отмечалось выше, для нее не оптимизировались функции принадлежности, а правила были получены не как информация от экспертов, а путем обучения модели.

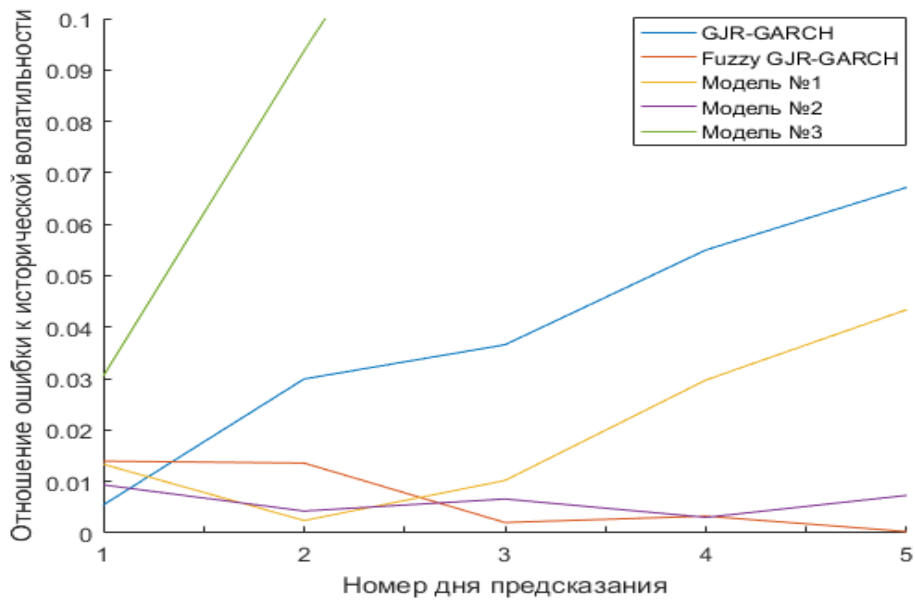


Рис. 5: Отношение ошибок предсказаний к исторической волатильности для индекса ММВБ.

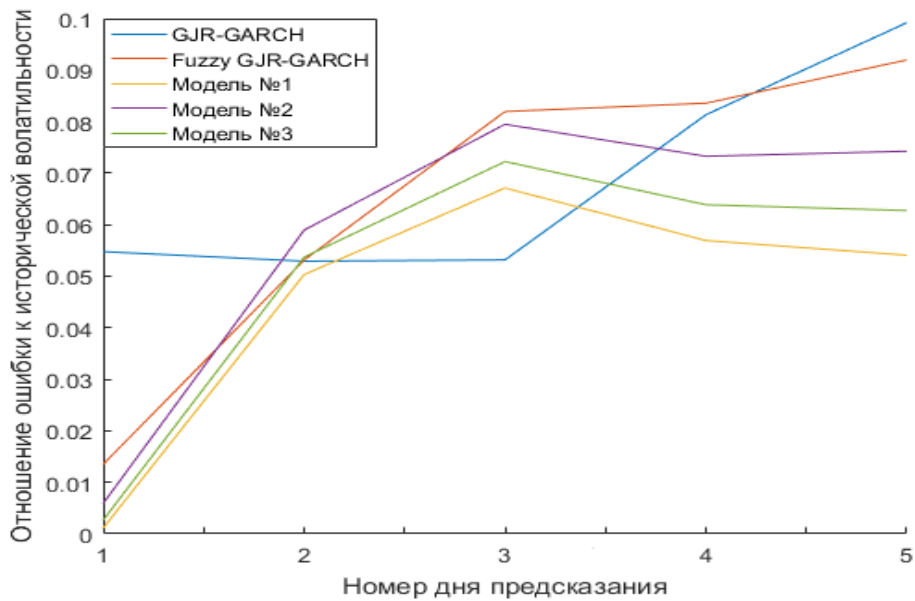


Рис. 6: Отношение ошибок предсказаний к исторической волатильности для индекса РТС.

ММВБ	MSFE	MAFE	LAFE
GJR-GARCH	1.25E-7	3.10E-4	5.37E-4
Fuzzy GJR-GARCH	4.99E-9	5.27E-5	1.11E-4
Модель №1	3.90E-8	1.58E-4	3.47E-4
Модель №2	2.69E-9	4.87E-5	7.42E-5
Модель №3	1.95E-6	1.22E-3	2.14E-3

Таблица 4: Ошибки моделей по предсказанию индекса ММВБ.

РТС	MSFE	MAFE	LAFE
GJR-GARCH	7.20E-7	8.13E-4	1.21E-3
Fuzzy GJR-GARCH	7.35E-7	7.80E-4	1.12E-3
Модель №1	3.84E-7	5.53E-4	8.13E-4
Модель №2	6.03E-7	7.03E-4	9.63E-4
Модель №3	4.70E-7	6.15E-4	8.75E-4

Таблица 5: Ошибки моделей по предсказанию индекса РТС.

## 6 Заключение

В работе проведен сравнительный анализ неразмытых и нечетких асимметричных GARCH-моделей применительно к прогнозированию волатильности российских фондовых индексов. Рассмотрены различные варианты построения переключающей функции с помощью аппарата теории нечетких множеств. В некоторых нечетких моделях переключающая функция строится с учетом агрегирования экспертной макроэкономической информации. Вместо реальной информации от экспертов в работе использовалась «псевдоэкспертная» информация, полученная в результате обучения системы на исторических данных. Результаты тестирования моделей на данных индексов ММВБ и РТС показали:

- 1) практически все рассмотренные нечеткие асимметричные GARCH-модели обладают лучшей прогностической способностью по сравнению с их неразмытыми аналогами;
- 2) использование экспертной информации не даёт существенного улучшения результата;

3) прогностическая способность различных нечетких моделей существенно различна на данных индексов ММВБ и РТС.

В плане дальнейших исследований представляет интерес как оптимизация нечетких моделей по всем параметрам, так более полный учет информации из различных источников (и не только экспертной).

## Список литературы

- [1] Baas S.M., Kwakernaak H. Rating and ranking of multiple-aspect alternatives using fuzzy sets// Automatic, 1977, 13, 47–58.
- [2] Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity// Journal of Econometrics, 1986, 31, 307–327.
- [3] Engle R. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation// Econometrica, 1982, 50, 987–1008.
- [4] Engle R., Ng V. Measuring and testing the impact of news on volatility// The Journal of Finance, 1993, 48(5), 1749–1778.
- [5] Fornari A., Mele A. Modeling the changing asymmetry of conditional variance// Economics letters, 1996, 50, 197–203.
- [6] Franke J., Härdle W.K., Hafner C.M. Statistics of Financial Markets: An Introduction. – Springer, 4th ed., 2015.
- [7] Glosten L.R., Jagannathan R., Runkle D.E. On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks// The Journal of Finance, 1993, 48(5), 1779–1801.
- [8] Hung J. A fuzzy asymmetric GARCH model applied to stock markets// Information Sciences, 2009, 179, 3930–3943.
- [9] Klir G.J., Yuan B. Fuzzy sets and fuzzy logic. Theory and applications. – Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1995.
- [10] Wang X., Ruan D., Kerre E.E. Mathematics of Fuzziness – Basic Issues. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2009.
- [11] Wiley J. A Practical Guide to Forecasting Financial Market Volatility. – TJ International Ltd, Padstow, Cornwall, 2005.
- [12] Zakoian J.M. Threshold heteroskedastic models// Journal of Economic Dynamics and Control, 1994, 18(5), 931–955.