Оценивание бета-коэффициентов в модели CAPM по нечетким данным

А.П. Михалевич, А.С. Шведов

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва

Введение

Методы нечеткой математики, в частности, нечеткой регрессии, находят все большее и большее применение в самых разных областях. Одним из преимуществ такого подхода является возможность использования нечетких данных. Так, одно нечеткое число может нести в себе информацию и о минимальной цене акции в течение дня, и о максимальной, и о средней цене. Могут учитываться и те допуски, с которыми реально получены данные. Модели с обычными, четкими данными оказываются частным случаем нечетких моделей.

Основополагающей работой по теории нечетких множеств является работа Заде, опубликованная в 1965 году. Несмотря на то, что предложенная методика возникла относительно недавно, она интенсивно развивается и находит применение во многих областях. Работа [Tanaka, Uegima, Asai, 1982] является одной из первых работ, посвященных задаче нечеткой регрессии. Построенная регрессия с нечеткими объясняемыми и четкими объясняющими переменными, коэффициенты которой также были нечеткими, оценивалась с помощью методов математического программирования. Авторами было отмечено, что в обычной регрессии отклонения между наблюдаемыми и предсказанными значениями отражают ошибки измерения. В нечеткой регрессии отклонения отражает сама структура модели, выраженная с помощью нечетких параметров.

В работе [Celminš, 1987a] рассматривался случай нечетких объясняемых, объясняющих переменных и четких коэффициентов. Оценивание производилось с помощью метода наименьших квадратов с упрощением относительно вида функций принадлежности нечетких векторов. Дополнительно, был определен ряд показателей, описывающих качество подгонки модели: степень совместимости между данными и моделью, их разброс. Продолжением данной работы является вторая работа [Celminš, 1987b], описывающая случай четких входных, выходных данных и нечетких параметров модели. Оценивание также производилось путем минимизации квадратов отклонений от единицы значений подобранных фукнций принадлежности. После введения метода нечеткой регрессии последовали некоторые усовершенствованные версии первоначальной модели. К примеру, в работе [Tanaka, Ishibuchi, 1991] представлен случай квадратичных функций принадлежности, в работе [Chang, Lee, 1994] — нечеткая регрессия с независимой от знака шириной разброса нечеткого числа. В работе [Diamond, 1988] также использовался метод наименьших квадратов как инструмент для оценивания нечеткой регрессии. Рассматривался случай нечетких регрессоров и объясняемых переменных, коэффициенты регрессии – четкие числа. Используя L^2–метрику, автор определил широко используемое в настоящих работах расстояние между двумя нечеткими треугольными числами.

Также имеется большое количество работ прикладной направленности. [Bell, Wang, 1997] рассматривают нечеткую регрессию при оценивании рисков травм, возникающих из-за постоянной нагрузки. Использование нечеткой регрессии при актуарном анализе и оценке временной структуры процентных ставок описано в работах [Sánchez, Gómez, 2003a, 2003b, 2004]. Среди многочисленных модификаций модели CAPM, широко применяемой при изучении фондовых рынков, также существуют модификации, основанные на использовании нечетких данных (см., например, [Östermark, 1989], [Campobasso, et.al, 2010], [Moussa, et.al, 2014]). Вероятно, первой работой для российского фондового рынка по модели CAPM с использованием нечетких чисел является работа [Попов, 2015].

Целью настоящей работы является установление взаимосвязи между ожидаемой доходностью финансового актива и его риском посредством модели CAPM, когда доходности задаются нечеткими числами. Рассматривается вопрос об оптимальном уровне нечеткости (степени фазификации) для российского фондового рынка.

Основные определения

Существует ряд несколько различающихся определений нечетких чисел и операций над ними. В настоящей работе нечеткие числа, индексы нечетких чисел, операции над нечеткими числами определяются в соответствии с работой [Шведов, 2013] и некоторыми дополнениями, сделанными в работе [Вельдяксов, Шведов, 2014].

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^2$, координаты в котором будем обозначать (ξ, η).

Определение 1. *Нечётким числом называется замкнутое и ограниченное (компактное) множество $K \subseteq \mathbb{R}^2$, если выполнены следующие условия:*

1) при $t \notin [0,1]$ пересечение множества K с прямой $\eta = t$ пусто;

2) при $t \in [0,1]$ пересечение множества K с прямой $\eta = t$ принимает вид:

$$\{(\xi, \eta) : k_1(t) \leqslant \xi \leqslant k_2(t), \eta = t\}, \tag{1}$$

где $k_1(t)$ является монотонно неубывающей непрерывной слева функцией, называемой левым индексом нечеткого числа; $k_2(t)$ является монотонно невозрастающей непрерывной слева функцией, называемой правым индексом нечеткого числа.

Если $k_1(1) < k_2(1)$, то нечеткое число называется трапецеидальным. Если $k_1(1) = k_2(1)$, то нечеткое число называется треугольным и упорядоченно представляется в виде: $(k_1(0), k_1(1), k_2(0))$. Нетрудно заметить, что нечеткое число становится действительным, если для $\forall t \in [0,1] \quad k_1(t) = k_2(t)$.

По аналогии с обычными действительными числами вводятся основные операции над нечеткими числами. Пусть $\tilde{Z}$ — нечеткое число с левым индексом $z^L(\eta)$ и правым индексом $z^R(\eta)$, $\tilde{U}$ — нечеткое число с левым индексом $u^L(\eta)$ и правым индексом $u^R(\eta)$ ($\eta \in [0,1]$).

Определение 2. *Суммой нечетких чисел $\tilde{Z}$ и $\tilde{U}$ называется нечеткое число $\tilde{Z}+\tilde{U}$ с левым индексом $z^L(\eta)+u^L(\eta)$ и правым индексом $z^R(\eta)+u^R(\eta)$.*

Определение 3. *Пусть λ — действительное число и $\lambda \geqslant 0$. Произведением действительного числа λ и нечеткого числа $\tilde{Z}$ называется нечеткое число $\lambda\tilde{Z}$ с левым индексом $\lambda z^L(\eta)$ и правым индексом $\lambda z^R(\eta)$.*

Немного иначе выглядит умножение на отрицательное число:

Определение 4. *Пусть λ — действительное число и $\lambda < 0$. Произведением действительного числа λ и нечеткого числа $\tilde{Z}$ называется нечеткое число $\lambda\tilde{Z}$ с левым индексом $\lambda z^R(\eta)$ и правым индексом $\lambda z^L(\eta)$.*

Также существуют различные подходы к определению расстояния $d(\tilde{Z}, \tilde{U})$ между нечеткими числами $\tilde{Z}$ и $\tilde{U}$. Нами использовалось следующее определение расстояния:

$$d(\tilde{Z}, \tilde{U}) = \sqrt{\int_0^1 (z^L(\eta) - u^L(\eta))^2 d\eta + \int_0^1 (z^R(\eta) - u^R(\eta))^2 d\eta}. \qquad (2)$$

Алгоритм

В настоящей работе практическая часть основана на алгоритме, предложенном в [Вельдяксов, Шведов, 2014]. Представим идейно данный подход.

Рассматривается регрессия с нечеткими объясняемыми и объясняющими переменными, а также с включением нечеткого и четкого свободного члена. Пусть Y_i и X_i — наборы нечетких чисел с левыми индексами $y_{i1}(t)$, $x_{i1}(t)$ и правыми индексами $y_{i2}(t)$, $x_{i2}(t)$ соответственно ($i = 1, \ldots, n, \quad t \in [0, 1]$). Регрессия строится следующим образом:

$$Y_i = aX_i + B, \qquad (3)$$

где a — действительное число, а B — нечеткое число с левым индексом $b_1(t)$ и правым индексом $b_2(t)$.

Поиск действительного a и нечеткого B осуществляется путем минимизации следующего функционала H:

$$H(a, B) = \sum_{i=1}^{n} d^2(Y_i, aX_i + B), \qquad (4)$$

где d — это расстояние между нечеткими числами, введенное с помощью (2).

В силу различий определений произведения действительного и нечеткого числа (определения 3 и 4) рассмотрение функционала распадается на два случая. При $a \geqslant 0$ рассматривается функционал $H_p(a, B)$:

$$H_p(a, B) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 (y_{i1}(t) - ax_{i1}(t) - b_1(t))^2 dt + \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 (y_{i2}(t) - ax_{i2}(t) - b_2(t))^2 dt, \tag{5}$$

а при $a < 0$ — $H_n(a, B)$:

$$H_n(a, B) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 (y_{i1}(t) - ax_{i2}(t) - b_1(t))^2 dt + \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 (y_{i2}(t) - ax_{i1}(t) - b_2(t))^2 dt. \tag{6}$$

Решая задачу минимизации в обоих случаях, получаем наборы параметров (a_p, B_p) и (a_n, B_n). Сопоставляя значения функционалов на этих наборах, выбирается тот набор параметров, где функционал принимает меньшее значение.

Опишем схему решения задачи минимизации. Пусть рассматривается случай, когда $a \geqslant 0$. На первом шаге фиксируется значение a и отдельно для каждой суммы выражения (5) определяются функции $b_1(t)$ и $b_2(t)$. Выбор функций происходит с помощью решения задачи вариацинного исчисления. Опуская выкладки, получается:

$$b_{1p}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (y_{j1}(t) - ax_{j1}(t)), \quad b_{2p}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (y_{j2}(t) - ax_{j2}(t)). \tag{7}$$

На втором шаге поиск числа a осуществляется минимизацией (5) при вышеполученных условиях на индексы нечеткого числа B.

Вводится ряд обозначений:

$$u_{i1}(t) = x_{i1}(t) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{j1}(t), \quad u_{i2}(t) = x_{i2}(t) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{j2}(t),$$

$$v_{i1}(t) = y_{i1}(t) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_{j1}(t), \quad v_{i2}(t) = y_{i2}(t) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_{j2}(t),$$

$$I_1 = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^1 v_{i1}(t)u_{i1}(t)dt, \quad I_2 = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^1 v_{i2}(t)u_{i2}(t)dt,$$

$$K_1 = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^1 u_{i1}^2(t)dt, \quad K_2 = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^1 u_{i2}^2(t)dt,$$

$$L = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^1 (v_{i1}^2(t) + u_{i1}^2(t))dt.$$

Минимизируемый функционал от одной переменной имеет вид:

$$F(a) = a^2(K_1 + K_2) - 2a(I_1 + I_2) + L.$$

Используя необходимое условие минимума, находим a:

$$a_p = \max\left(0, \frac{I_1 + I_2}{K_1 + K_2}\right). \tag{8}$$

Случай $a < 0$ рассматривается аналогично, так как в формулах можно поменять местами x_{1t} и x_{2t}, а значит, u_{1t} и u_{2t}. На первом шаге получаются формулы:

$$b_{1n}(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(y_{j1}(t) - ax_{j2}(t)), \quad b_{2n}(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(y_{j2}(t) - ax_{j1}(t)). \tag{9}$$

Вводятся обозначения:

$$J_1 = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 v_{i1}(t) u_{i2}(t) dt, \quad J_2 = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 v_{i2}(t) u_{i1}(t) dt.$$

На втором шаге значение a принимает вид:

$$a_n = \min \left(0, \frac{J_1 + J_2}{K_1 + K_2} \right). \tag{10}$$

По приведенным формулам рассчитываются оба функционала: $H_p(a_p, B_p)$ и $H_n(a_n, B_n)$, и выбирается наименьшее значение, которому будет соответствовать итоговый набор параметров.

Следует отметить, что данный алгоритм применим и к четкому значению B. В этом случае вместо функций $b_1(t)$ и $b_2(t)$ будет фигурировать одно и то же значение b.

Практическая реализация

Нами проанализирована возможность применения нечеткой версии модели CAPM на российском фондовом рынке. Расчеты основаны на описанном алгоритме, где в качестве объясняемых переменных выступали доходности исследуемых активов, а в качестве объясняющих — доходность рыночного портфеля. Полученные бета-коэффициенты сопоставлялись с уже посчитанными значениями согласно классической версии модели оценки финансовых активов и моделей одностороннего риска.

Данные по котировкам были взяты из ресурса www.finam.ru. Для рассмотренных примеров недельные доходности активов моделировались двумя способами:

1) Разница между логарифмом цены закрытия на пятницу и логарифмом цены отрытия на понедельник:

$$y_i = \ln(\mathrm{close}(y_i)) - \ln(\mathrm{open}(y_i)). \tag{11}$$

2) Разница между ценами закрытия актива в моменты времени i и $i-1$, деленная на цену закрытия актива в $i-1$ момент времени:

$$y_i = \frac{\mathrm{close}(y_i) - \mathrm{close}(y_{i-1})}{\mathrm{close}(y_{i-1})}. \tag{12}$$

Исходя из соображений о том, что вышеописанные способы определения доходностей могут только частично определять существующую тенденцию их изменения, проводилась фазификация данных. В обоих случаях фазификация данных осуществлялась в виде треугольных нечетких чисел.

Случай 1. При определении доходностей (11) в качестве левого и правого индексов ($\eta \in [0,1]$) нечеткого числа использовались:

$$y_i^L(\eta) = \ln(\min(y_i)) - \ln(\mathrm{open}(y_i)) + \eta(\ln(\mathrm{close}(y_i) - \ln(\min(y_i))),$$

$$y_i^R(\eta) = \ln(\max(y_i)) - \ln(\mathrm{open}(y_i)) - \eta(\ln(\max(y_i)) - \ln(\mathrm{close}(y_i)),$$

где $\min(y_i)$ — минимальная цена актива за неделю i;

$\max(y_i)$ — максимальная цена актива за неделю i;

$\mathrm{open}(y_i)$ — цена закрытия на понедельник недели i.

$\mathrm{close}(y_i)$ — цена закрытия на пятницу недели i.

Случай 2. При определении доходностей (12) в качестве левого и правого

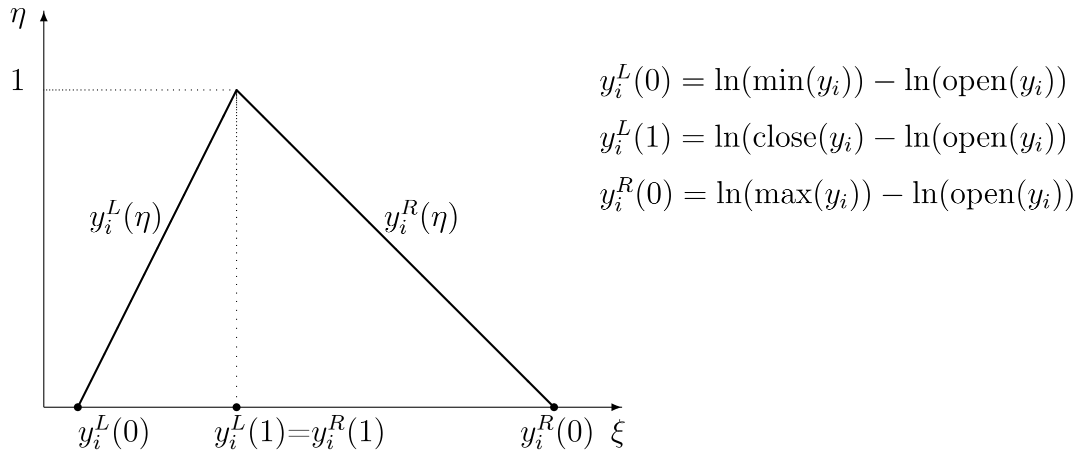


Рис 1: Треугольная фазификация нечеткого числа y_i для 1 случая определения доходностей

индексов ($\eta \in [0, 1]$) нечеткого числа использовались:

$$y_i^L(\eta) = \frac{\min(y_i) - \max(y_{i-1})}{\max(y_{i-1})} + \eta \left(\frac{\mathrm{close}(y_i)}{\mathrm{close}(y_{i-1})} - \frac{\min(y_i)}{\max(y_{i-1})} \right),$$

$$y_i^R(\eta) = \frac{\max(y_i) - \min(y_{i-1})}{\min(y_{i-1})} - \eta \left(\frac{\max(y_i)}{\min(y_{i-1})} - \frac{\mathrm{close}(y_i)}{\mathrm{close}(y_{i-1})} \right),$$

где $\min(y_i)$ — минимальная цена актива за неделю i;

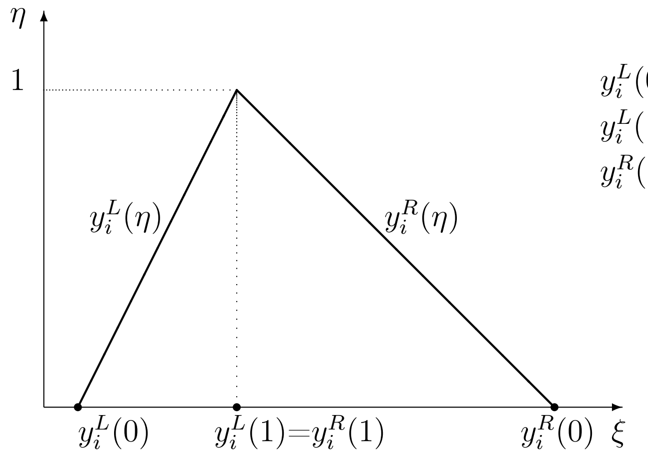
$\max(y_i)$ — максимальная цена актива за неделю i;

$\mathrm{close}(y_i)$ — цена закрытия на пятницу недели i.

Несложно увидеть, что в обоих случаях определения доходностей проводилась несимметричная фазификация, то есть не в форме равнобедренных треугольников. Для расчета рыночной доходности и её фазификации использовались те же подходы, что и для активов.

Пример 1.

Для анализа выбраны акции следующих компаний: ЕЭС России (EESR), Лукойл (LKOH), Сургутнефтегаз (SNGS), Ростелеком (RTKM), Мосэнерго



$$y_i^L(0) = (\min(y_i) - \max(y_{i-1}))/\max(y_{i-1})$$
$$y_i^L(1) = (\mathrm{close}(y_i) - \mathrm{close}(y_{i-1}))/\mathrm{close}(y_{i-1})$$
$$y_i^R(0) = (\max(y_i) - \min(y_{i-1}))/\min(y_{i-1})$$

Рис 2: Треугольная фазификация нечеткого числа y_i для 2 случая определения доходностей

(MSNG). В качестве рыночной доходности использовалась доходность индекса РТС (RTS). Проводится исследование за период с января 1996 года по декабрь 2001 года. Полученные бета-коэффициенты нечеткой версии CAPM сопоставлялись с уже посчитанными бета-коэффициентами классической версии CAPM, которые были взяты из ресурса http://www.aton-line.ru/. Доходности определялись в ценах закрытия согласно (12) с соответствующей фазификацией данных.

Таблица 1: Оценки бета-коэффициентов для акций компаний, рассчитанные с помощью обычной линейной регрессии(OLS Beta) и нечеткой регрессии(Fuzzy Beta)
Строка OLS Beta — Источник: ресурс http://www.aton-line.ru/
Строка Fuzzy Beta — Источник: расчеты авторов

Stock	**EESR**	**LKOH**	**SNGS**	**RTKM**	**MSNG**
OLS Beta	1.3	1.00	1.26	1.11	1.30
Fuzzy Beta	1.383	1.051	1.432	1.191	1.605

В Таблице 1 содержатся результаты оценивания модели без введения нечеткости (строка OLS Beta) и бета-коэффициенты нечеткой версии CAPM (строка Fuzzy Beta).

Пример 2.

Для анализа выбраны акции следующих компаний: ЕЭС России (EESR), Иркутскэнерго (IRGZ), Мосэнерго (MSNG), Ростелеком (RTKM), Сургутнефтегаз (SNGS), Лукойл (LKOH). Доходность индекса РТС (RTS) выступала в качестве рыночной доходности. Рассматривается временной промежуток с апреля 1996 года по август 1998 года. Доходности определялись согласно (11) с соответствующей фазификацией данных. Бета-коэффициенты нечеткой версии модели CAPM сопоставлялись с бета-коэффициентами модели оценки финансовых активов без введения нечеткости.

Таблица 2: Оценки бета-коэффициентов для акций компаний, рассчитанные с помощью обычной линейной регрессии(OLS Beta) и нечеткой регрессии(Fuzzy Beta)
Строка OLS Beta — Источник: [Бухвалов, 2006]
Строка Fuzzy Beta — Источник: расчеты авторов

Stock	**EESR**	**IRGZ**	**MSNG**	**RTKM**	**SNGS**	**LKOH**
OLS Beta	0.754	0.586	0.587	0.446	0.573	0.414
Fuzzy Beta	0.989	0.779	0.834	0.672	0.739	0.78

Таблица 2 содержит результаты оценивания модели без введения нечеткости (строка OLS Beta) и бета-коэффициенты нечеткой версии CAPM (строка Fuzzy Beta).

Пример 3.

Исследование проводилось за период с января 2013 года по декабрь 2014 года. Для анализа выбраны акции следующих компаний: Газпром (GAZP), Лукойл (LKOH), Мобильные ТелеСистемы (MTS), Роснефть (ROSN), Сбербанк (SBER), Сургутнефтегаз (SNGS), Уралкалий (URKA), Магнит (MGNT). В качестве рыночной доходности использовалась доходность индекса ММВБ (MICEX). Недельные доходности активов моделировались двумя способами согласно (11) и (12) с соответствующей фазификацией. Полученные бета-коэффициенты сопоставлялись не только с результатами классической модели CAPM, но и с односторонними бета-коэффициентами моделей одностороннего риска (Estrada, Harlow и Rao).

Таблица 3: Оценки бета-коэффициентов, рассчитанные с помощью обычной линейной регрессии(OLS Beta), модели Estrada(D-Beta)и модели Harlow&Rao(HR-Beta)
Источник: ресурс https://fmlab.hse.ru

Stock	OLS Beta	D-Beta	HR-Beta
GAZP	1.10	1.13	1.09
LKOH	0.83	0.74	0.72
MTS	1.18	1.21	1.10
ROSN	0.80	0.71	0.66
SBER	1.34	1.44	1.40
SNGS	0.93	0.95	0.89
URKA	0.68	0.84	0.66
MGNT	1.11	1.27	1.15

Таблица 4: Оценки бета-коэффициентов, полученных с помощью методов нечеткой регрессии: для 1 случая определения доходностей (Fuzzy Beta 1) и для 2 случая определения доходностей (Fuzzy Beta 2)
Источник: расчеты авторов

Stock	GAZP	LKOH	MTS	ROSN	SBER	SNGS	URKA	MGNT
Fuzzy Beta 1	1.064	0.786	0.855	0.71	1.399	0.874	0.584	1.035
Fuzzy Beta 2	1.126	0.835	0.932	0.715	1.462	0.811	0.727	1.083

В Таблице 3 содержатся результаты оценивания модели без введения нечеткости, где столбец OLS Beta содержит бета-коэффициенты классической модели CAPM; столбец D-Beta — β модели Estrada; столбец HR-Beta — β Harlow&Rao.

В Таблице 4 приведены результаты, полученные с помощью методов нечеткой регрессии, где строка Fuzzy Beta 1 содержит бета-коэффициенты для 1 случая определения доходностей по формуле (11), строка Fuzzy Beta 2 — для 2 случая определения доходностей по формуле (12). На рис.3 представлены результаты, содержащиеся в Таблицах 3 и 4.

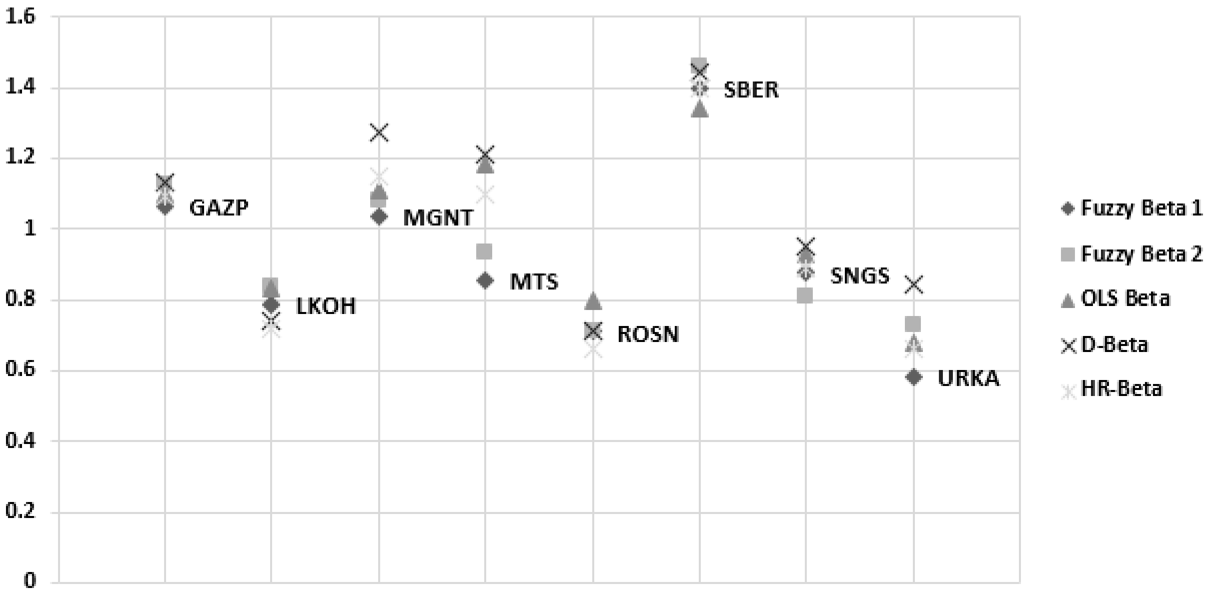


Рис 3: Диаграмма оценок бета-коэффициентов акций компаний, где Fuzzy Beta получено с помощью нечеткой версии CAPM, OLS Beta — с помощью классической версии CAPM, D-Beta — с помощью модели Estrada, HR-Beta — с помощью модели Harlow&Rao

Выводы

На примерах показано, что бета-коэффициенты, полученные с помощью нечеткой версии модели CAPM, в целом соответствуют и бета-коэффициентам, рассчитанным с помощью обычного метода наименьших квадратов, и односторонним бета-коэффициентам. Первый способ определения доходностей в виде разности логарифмов и соответствующая фазификация показывают более близкие оценки найденных коэффициентов к коэффициентам бета моделей CAPM без нечеткости.

Также показано, что оценки нечеткой версии модели CAPM, как и оценки классической версии CAPM, чувствительны к изменению определения доходностей и длины периода оценивания. Однако замечено, что бета-коэффициенты, полученные с помощью методов нечеткой регрессии, оказываются более стабильными при изменении длины периода оценивания и способа задания доходностей по сравнению с оценками, полученными с помощью обычного метода наименьших квадратов.

Источники

[1] Бухвалов А.В., Окулов В.Л. Классические модели ценообразования на капитальные активы и российский финансовый рынок. Часть 1: эмпирическая проверка модели CAPM // Научные доклады № 36(R)–2006 . СПб: НИИ менеджмента СПбГУ, 2006.

[2] Вельдяксов В.Н., Шведов А.С. О методе наименьших квадратов при регрессии с нечеткими данными // Экономический журнал ВШЭ. 2014. Т.18. №2.

[3] Попов Т.С. Эконометрические модели с нечеткими данными // Магистерская диссертация (научный руководитель А.С. Шведов), Москва: НИУ ВШЭ, 2015.

[4] Шведов А.С. О нечетко-случайных величинах: препринт WP2/2013/02. М.: НИУ ВШЭ, 2013.

[5] Bell P., Wang H. (1997) Fuzzy linear regression models for assessing risks of cumulative trauma disorders // Fuzzy Sets and Systems. 92. P. 317-340.

[6] Campobasso F., Fanizzi A., Bilancia M. (2010) The Pricing of Risky Securities in a Fuzzy Least Square Regression Model // Classification as a Tool for Research. P. 639–646.

[7] Celminš A. (1987a) Least squares model fitting to fuzzy vector data // Fuzzy Sets and Systems. 22. P. 245-269.

[8] Celminš A. (1987b) Multidimensional least-squares model fitting of fuzzy models // Math. Modeling. 9. P. 669-690.

[9] Chang P., Lee E. (1994) Fuzzy linear regression with spreads unrestricted in sign // Computers Math. Appl. 28. P. 61-71.

[10] Diamond P.(1988) Fuzzy Least Squares // Information Sciences. 46. P. 141-157.

[11] Moussa A., Kamdem J., Shapiro A., Terraza M.(2014) CAPM with fuzzy returns and hypothesis testing // Insurance: Mathematics and Economics. 55. P. 40-57.

[12] Östermark R.(1989) Fuzzy Linear Constraints in the Capital Asset Pricing Model // Fuzzy Sets and Systems. 30. P. 93-102.

[13] Sánchez J., Gómez A. (2003a) Applications of fuzzy regression in actuarial analysis // JRI 2003. 70(4). P. 665-699.

[14] Sánchez J., Gómez A. (2003b) Estimating a term structure of interest rates for fuzzy financial pricing by using fuzzy regression methods // Fuzzy Sets and Systems. 139. P. 313-331.

[15] Sánchez J., Gómez A. (2004) Estimating a fuzzy term structure of interest rates using fuzzy regression techniques // European Journal of Operational Research. 154. P. 804-818.

[16] Tanaka H., Ishibuchi H. (1991) Identification of possibilistic linear systems by quadratic membership functions of fuzzy parameters // Fuzzy Sets and Systems. 41. P. 145-160.

[17] Tanaka H., Uegima S., Asai K. (1982) Linear Regression Analysis with Fuzzy Model // IEEE Trans. On Systems, Man and Cybernetics. 12. P. 903-907.